VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

ACHTTIENDE DEEL.

MET PLATEN.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1879.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ACHTTIENDE DEEL.





IETS OVER ZAMENSTELLING VAN

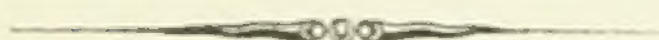
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

UIT EENE AANGENOMEN

INTEGRAALVERGELIJKING.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.



1. Onder de methoden tot behandeling van gewone differentiaalvergelijkingen met twee veranderlijken behoort ook eene reeds lang bekende, maar toch zeer merkwaardige, wanneer zij tot algemeene uitkomsten voert; die methode namelijk waarbij het geldt, uit eene aangenomen integraalvergelijking de overeenkomstige differentiaalvergelijkingen op te sporen.

In dit opstel zullen enkele zulke integralen worden behandeld, die bestaan uit het produkt van machten van veelledige stelkundige uitdrukkingen.

2. Neem voor de integraal aan

$$(x + ay + b)^p (x + a_1 y + b_1)^q = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}.$$

Daaruit volgt

$$p\frac{1 + ay'}{x + ay + b} + q\,\frac{1 + b_1 y'}{x + a_1 y + b_1} = 0,$$

of

$$[(p + q)x + (pa_1 + qa)y + (pb_1 + qb)] + [(ap + a_1 q)x + (p + q)aa_1 y + (pab_1 + qa_1 b)]y' = 0.$$

Vergelijkt men dit met de differentiaalvergelijking

$$(Ax + By + C) + (A_1 x + B_1 y + C_1)y' = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

zoo is

$A = p + q$, $B = pa_1 + qa$, $C = pb_1 + qb$, $A_1 = ap + a_1 q$, $B_1 = (p+q)aa_1$, $C_1 = pab_1 + qa_1 b$.

Daaruit volgt

$$aa_1 = \frac{B_1}{A}, \; a + a_1 = \frac{A_1 + B}{p+q} = \frac{A_1 + B}{A}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dus zijn a en a_1 de wortels der tweedemachtsvergelijking

$$A\alpha^2 - (A_1 + B)\alpha + B_1 = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1^a)$$

Verder is

$$aC - C_1 = qb(a - a_1), \quad C_1 - a_1 C = pb_1 (a - a_1), \quad aA - A_1 = q(a - a_1),$$
$$A_1 - a_1 A = p(a - a_1), \quad aA - B = p(a - a_1), \quad B - a_1 A = q(a - a_1);$$

waaruit volgt

$$p = \frac{A_1 - a_1 A}{a - a_1} = \frac{aA - B}{a - a_1}, \; q = \frac{aA - A_1}{a - a_1} = \frac{B - a_1 A}{a - a_1}, \quad \ldots \ldots \quad (1^b)$$

$$b = \frac{aC - C_1}{aA - A_1} = \frac{aC - C_1}{B - a_1 A}, \; b_1 = \frac{C_1 - aC}{A_1 - a_1 A} = \frac{C_1 - aC}{aA - B}. \quad \ldots \ldots \quad (1^c)$$

3. Deze oplossing gaat niet door, zoodra $A = 0$ wordt; alsdan is tevens

$$B_1 = 0 \text{ en } A_1 + B = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

Er blijven dus over

$$B = (a_1 - a)p, \quad C = (b_1 - b)p, \quad C_1 = (ab_1 - a_1 b)p.$$

Dus

$$aC - C_1 = bB \text{ en } a_1 C - C_1 = b_1 B; \text{ dus } b = \frac{aC - C_1}{B}, \; b_1 = \frac{a_1 C - C_1}{B}; \text{en } p = \frac{B}{a_1 - a} = -q; \; . (2)$$

wanneer men a en a_1 willekeurig aanneemt; of als men a en p willekeurig aanneemt,

$$b = \frac{aC - C_1}{B}, \; b_1 = \frac{(B + ap)C - C_1 p}{Bp}, \; a_1 = \frac{B}{p} + a, \; q = -p. \quad \ldots \ldots \quad (2^a)$$

4. Evenzeer worden naar (1^b) p en q onbepaald, als $a_1 = a$ is; dan volgt uit (1^a)

$$(A_1 + B)^2 = 4AB_1, \text{ of ook } (A_1 - B)^2 = 4(AB_1 - A_1 B) \quad \ldots \quad (\text{III}^a)$$

De betrekkingen tusschen de coëfficiënten worden nu echter

$$A = p + q,\quad B = (p+q)a,\quad C = pb_1 + qb,\quad A_1 = (p+q)a,\quad B_1 = (p+q)a^2,\quad C_1 = aC$$
$$\qquad = Aa \qquad\qquad = B \qquad\qquad = \frac{B^2}{A} \qquad\qquad = \frac{BC}{A}\,; \quad \text{(III)}$$

waardoor aan de bovenstaande vergelijkingen wordt voldaan. Verder wordt

$$a = \frac{B}{A},\quad p = \frac{Ab - C}{b - b_1},\quad q = \frac{C - Ab_1}{b - b_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarbij de b en b_1 geheel willekeurig blijven.

5. De oplossing van N°. 3 houdt op geldig te zijn, zoodra ook

$$B = 0\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

maar naar de laatste der vergelijkingen (2^a) wordt dan $a_1 = a$, en komt men dan tot het geval van N°. 4.

Men houdt dan over

$$C = (b_1 - b)p,\quad C_1 = a(b_1 - b)p\,;$$

dus

$$a = \frac{C_1}{C} = a_1,\quad p = \frac{C}{b_1 - b} = -q\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

terwijl hier de b en b_1 onbepaald blijven; of als men b en p willekeurig aanneemt,

$$a = \frac{C_1}{C} = a_1,\quad b_1 = b + \frac{C}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4^a)$$

6. Men neme vervolgens voor de integraalvergelijking aan

$$(x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e)^p\,(x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1)^q = P\,; \quad \text{(B)}$$

waaruit volgt

$$p\,\frac{2(x + ay + c) + 2(ax + by + d)\,y'}{x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e} + q\,\frac{2(x + a_1y + c_1) + 2(a_1x + b_1y + d_1)\,y'}{x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1} = 0,$$

of

$$\begin{aligned}
&p\{x^3 + (2a_1 + a)x^2y + (b_1 + 2aa_1)xy^2 + ab_1y^3 + (c + 2c_1)x^2 + \\
&\qquad + (d_1 + ac_1 + a_1c)2xy + (2ad_1 + b_1c)y^2 + (e_1 + 2cc_1)x + (ae_1 + 2cd_1)y + ce_1\} + \\
&+ q\{x^3 + (2a + a_1)x^2y + (b + 2aa_1)xy^2 + a_1by^3 + (c_1 + 2c)x^2 + \\
&\qquad + (d + ac_1 + a_1c)2xy + (2a_1d + bc_1)y^2 + (e + 2cc_1)x + (a_1e + 2c_1d)y + c_1e\} + \\
&+ y'\Big[p\{ax^3 + (2aa_1 + b)x^2y + (ab_1 + 2a_1b)xy^2 + bb_1y^3 + (2ac_1 + d)x^2 + \\
&\qquad + (ad_1 + a_1d + bc_1)2xy + (2bd_1 + b_1d)y^2 + (ae_1 + 2c_1d)x + (be_1 + 2dd_1)y + de_1\} + \\
&+ q\{a_1x^3 + (2aa_1 + b_1)x^2y + (a_1b + 2ab_1)xy^2 + bb_1y^3 + (2a_1c + d_1)x^2 + \\
&\qquad + (ad_1 + a_1d + b_1c)2xy + (2b_1d + bd_1)y^2 + (a_1e + 2cd_1)x + (b_1e + 2dd_1)y + d_1e\}\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Vergelijkt men deze uitkomst met de algemeene differentiaalvergelijking van denzelfden vorm

$$(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 + Hx + Ky + L) +$$
$$+ (A_1x^3 + 3B_1x^2y + 3C_1xy^2 + D_1y^3 + E_1x^2 + 2F_1xy + G_1y^2 + H_1x + K_1y + L_1)y' = 0; \quad \text{(V)}$$

zoo is

$$\begin{array}{ll}
A = p + q, & A_1 = pa + qa_1, \\
3B = p(2a_1 + a) + q(2a + a_1), & 3B_1 = p(2aa_1 + b) + q(2aa_1 + b_1), \\
3C = p(b_1 + 2aa_1) + q(b + 2aa_1), & 3C_1 = p(ab_1 + 2a_1b) + q(a_1b + 2ab_1), \\
D = pab_1 + qa_1b, & D_1 = pbb_1 + qbb_1, \\
E = p(c + 2c_1) + q(c_1 + 2c), & E_1 = p(2ac_1 + d) + q(2a_1c + d_1), \\
F = p(d_1 + ac_1 + a_1c) + q(d + ac_1 + a_1c), & F_1 = p(ad_1 + a_1d + bc_1) + q(ad_1 + a_1d + b_1c), \\
G = p(2ad_1 + b_1c) + q(2a_1d + bc_1), & G_1 = p(2bd_1 + b_1d) + q(2b_1d + bd_1), \\
H = p(e_1 + 2cc_1) + q(e + 2cc_1), & H_1 = p(ae_1 + 2c_1d) + q(a_1e + 2cd_1), \\
K = p(ae_1 + 2cd_1) + q(a_1e + 2c_1d), & K_1 = p(be_1 + 2dd_1) + q(b_1e + 2dd_1), \\
L = pce_1 + qc_1e; & L_1 = pde_1 + qd_1e.
\end{array}$$

Hieruit volgt vooreerst

$$a + a_1 = \frac{3B + A_1}{2A}, \quad bb_1 = \frac{D_1}{A}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5^a)$$

en vervolgens uit

$$\tfrac{3}{2}(B - A_1) = (a - a_1)(q - p), \quad 3(C - B_1) = (b - b_1)(q - p), \quad \tfrac{3}{2}(C_1 - D) = (ab_1 - a_1b)(q - p),$$

daar

$$ab_1 - a_1b = b(a - a_1) - a(b - b_1) = b_1(a - a_1) - a_1(b - b_1),$$
$$(B - A_1)b - 2(C - B_1)a = C_1 - D \quad \text{en} \quad (B - A_1)b_1 - 2(C - B_1)a_1 = C_1 - D;$$

waarvan de som geeft, als men de waarde van $a + a_1$ invoert,

$$b + b_1 = \frac{(C - B_1)(3B + A_1) + 2(C_1 - D)A}{(B - A_1)A}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5^b)$$

en daaruit

$$aa_1 = \frac{1}{4}\left\{\frac{3(C + B_1)}{A} - (b + b_1)\right\} = \frac{B_1(3B - A_1) - (C_1 - D)A - 2A_1C}{2(B - A_1)A}; \quad \ldots \quad (5^c)$$

zoodat a en a_1 de wortels worden van de vergelijking

$$2A\alpha^2 - (3B + A_1)\alpha + \frac{B_1(3B - A_1) - (C_1 - D)A - 2A_1C}{B - A_1}, \quad \ldots\ldots \quad (5^d)$$

en b en b_1 van de volgende

$$A\beta^2 - \frac{(C-B_1)(3B+A_1)+2(C_1-D)A}{B-A_1}\beta + D_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (5^e).$$

Uit dezelfde vergelijkingen volgt verder

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{A_1 - A a_1}{a-a_1}, \quad q = \dfrac{A a - A_1}{a-a_1}, \\ \text{waaruit} \\ p - q = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{A_1 - B}{a-a_1}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5^f).$$

Van de acht waarden A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, zijn er nu zes gebruikt; er blijven daartusschen dus nog twee betrekkingen over. Daartoe kan men de volgende gebruiken.

Vooreerst is

$$(b+b_1)a - (ab_1 + a_1 b) = (a-a_1)b \text{ en } (b+b_1)a_1 - (ab_1 + a_1 b) = -(a-a_1)b_1;$$

dus, daar $ab_1 + a_1 b = \dfrac{3C_1 + D}{2A}$ is, geeft hun produkt

$$(b+b_1)^2 a a_1 - (ab_1 + a_1 b)(b+b_1)(a+a_1) + (ab_1 + a_1 b)^2 = -bb_1\{(a+a_1)^2 - 4aa_1\}$$

na invoering der gevonden waarden

$$2\{(C-B_1)(3B+A_1) - 2(C_1-D)A\}^2 \frac{B_1(3B-A_1) - 2CA_1 - (C_1-D)A}{(B-A_1)^2} -$$

$$-(3C_1+D)(3B+A_1)\{(C-B_1)(3B+A_1) - 2(C_1-D)A\} + A(3C_1+D)^2(B-A_1) +$$

$$+D_1\left[(3B+A_1)(B-A_1) - 8A\{B_1(3B-A_1) - 2A_1C - (C_1-D)A\}\right] = 0 \ldots (a).$$

Ten tweede geven de reeds gebruikte vergelijkingen

$$ab_1 - a_1 b = \frac{C_1 - D}{2(C-B_1)}(b-b_1) \text{ en } ab_1 + a_1 b = \frac{3C_1 + D}{2A}.$$

Verhef deze beide tot de tweede macht; dan geeft haar verschil

$$4\,.\,aa_1\,.\,bb_1 = \left(\frac{D+3C_1}{2A}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{C_1-D}{C-B_1}\right)^2 \{(b+b_1)^2 - 4bb_1\},$$

of wederom

$$\frac{8D_1}{B-A_1}\{B_1(3B-A_1) - 2A_1C - (C_1-D)A\} = (3C_1+D)^2 -$$

$$-\left(\frac{C_1-D}{C-B_1}\right)^2 \left\{\left(\frac{(C-B_1)(3B+A_1)+2(C_1-D)A}{B-A_1}\right)^2 - 4AD_1\right\} \ldots\ldots\ldots (b).$$

Nu is verder

$$\frac{F-E_1}{p-q} = d_1 - d + a_1 c - a c_1, \quad \frac{G-F_1}{p-q} = a d_1 - a_1 d + b_1 c - b c_1;$$

en hieruit kan men d en d_1 oplossen

$$(a_1-a)d = \frac{F-E_1}{p-q}a - \frac{G-F_1}{p-q} + (b_1 - a a_1)c - (b-a^2)c_1, \quad (a_1-a)d_1 = \frac{F-E_1}{p-q}a_1 - \frac{G-F_1}{p-q} + (b_1-a_1^2)c - (b-a a_1)c_1.$$

Substitueert men deze d en d_1 in de waarde van G_1, zoo is

$$c\{(p+2q)(b_1^2 - a a_1 b_1) + (2p+q)(b b_1 - a_1^2 b)\} - c_1\{(p+2q)(b b_1 - a^2 b_1) + (2p+q)(b^2 - a a_1 b)\} =$$
$$= -G_1(a-a_1) - \frac{F-E_1}{p-q}3C_1 + \frac{G-F_1}{p-q}\{(p+2q)b_1 + (2p+q)b\};$$

of daar $(p+2q)b_1 + (2p+q)b = 3(C + 2B_1 - 2A a a_1)$ en $(p+2q)a b_1 + (2p+q)a_1 b = 3C_1$ is, als men de laatste der $(5f)$ gebruikt,

$$c\{(C + 2B_1 - 2A a a_1)b_1 - C_1 a_1\} - c_1\{(C + 2B_1 - 2A a a_1)b - C_1 a\} =$$
$$= \frac{a-a_1}{3(A_1-B)}\left[-G_1(A_1-B) - (F-E_1)2C_1 + (G-F_1)2(C + 2B_1 - 2A a a_1)\right].$$

Evenzoo geeft de waarde voor E

$$c(A_1 + A a_1 - 2A a) - c_1(A_1 + A a - 2A a_1) = -(a-a_1)E;$$

en nu kan men c en c_1 oplossen, daar

$$C + 2B_1 - 2A a a_1 = \frac{(A_1+B)(B_1-C) - (C_1-D)A}{A_1-B}.$$

is, na substitutie der waarden gevonden voor $\dfrac{b-b_1}{a-a_1}$ en $\dfrac{a b_1 - a_1 b}{a-a_1}$.

$$\left.\begin{aligned}
&3c\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\} - 3BC_1(A_1-B)^2\right] = \\
&\quad = 3(A_1-B)E\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}b - C_1(A_1-B)a\right] + \\
&\quad + (A_1 - 2A a_1 + A a)\left[\{-G_1(A_1-B) + (F-E_1)2C_1\}(A_1-B) + \right. \\
&\quad \left. + 2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C) - (C_1-D)A\}\right], \\
&3c_1\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\} - 3BC_1(A_1-B)^2\right] = \\
&\quad = 3(A_1-B)E\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}b_1 - C_1(A_1-B)a_1\right] + \\
&\quad + (A_1 - 2A a + A a_1)\left[\{-G_1(A_1-B) + (F-E_1)2C_1\}(A_1-B) + \right. \\
&\quad \left. + 2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C) - (C_1-D)\}A\right].
\end{aligned}\right\} \quad (5g)$$

Substitueert men dit in de vergelijkingen voor d en d_1, dan komt er, na invoering der waarden voor $\dfrac{b-b_1}{a-a_1}$, $\dfrac{a b_1 - a_1 b}{a-a_1}$ en $(b+b_1)$,

$$\left.\begin{aligned}
&3d(A_1-B)\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3BC_1(A_1-B)^2\right]=\\
&\quad =2\{(F-E_1)a-(G-F_1)\}\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}\right.\\
&\quad \left.-3BC_1(A_1-B)^2\right]+3E(A_1-B)(C_1-D)\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-A(C_1-D)\}a-C_1(A_1-B)\right]+\\
&\quad +\left[\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}(A_1-B)+2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\right]\\
&\quad \left[\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)+(C_1-D)(4A+A_1)\}a-\{2A_1(C-B_1)+A(C_1-D)\}\right],\\
&3d_1(A_1-B)\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3BC_1(A_1-B)^2\right]=\\
&\quad =2\{(F-E_1)a_1-(G-F_1)\}\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-\right.\\
&\quad \left.-3BC_1(A_1-B)^2\right]+3E(A_1-B)(C_1-D)\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-A(C_1-D)\}a_1-C_1(A_1-B)\right]+\\
&\quad +\left[\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}(A_1-B)+2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\right]\\
&\quad \left[\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)+(C_1-D)(4A+A_1)\}a_1-\{2A_1(C-B_1)+A(C_1-D)\}\right].
\end{aligned}\right\}(5^b)$$

De beide overige vergelijkingen, die behalve de a en b, slechts de c en d bevatten,

$$G = p(2ad_1 + b_1c) + q(2a_1d + bc_1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$$

en

$$E_1 = p(2ac_1 + d) + q(2a_1c + d_1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (d)$$

zijn dus wederom twee voorwaardensvergelijkingen.

Eindelijk volgt uit de waarden voor L en L_1

$$e_1 = \frac{1}{p}\,\frac{Ld_1 - L_1d}{cd_1 - c_1d}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5^d)$$

$$e = \frac{1}{q}\,\frac{L_1c - Lc_1}{cd_1 - c_1d}; \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5^e)$$

waarin de noemer gevonden wordt uit de volgende vergelijking.

$$\begin{aligned}
&9Q^2\frac{A_1-B}{a-a_1}(cd_1-c_1d)=3\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\left[2(G-F_1)\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)+\right.\right.\\
&\quad +(C_1-D)(4A+A_1)\}-2(F-E_1)\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3E(A_1-B)(C_1-D)\big]+\\
&\quad +(A_1-B)\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)+(C_1-D)(4A+A_1)\}+\\
&\quad \left.+6BC_1(F-E_1)(A_1-B)^2\right]\cdot\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\left[E(C_1-D)+2B(G-F_1)+\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+B\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}(A_1-B)\right]\right]+\\
&\quad +\left[2\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}(G-F_1)\{2(A-3B)(B_1-C)A-(C+C_1-D-D_1)\}-\right.\\
&\quad -(A_1-B)\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}\{2A_1(C-B_1)+A(C_1-D)\}+3C_1(A_1-B)^2\\
&\quad \left.\{2B(G-F_1)-E(C_1-D)\}\right]\cdot\left[2\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{3E(B_1-C)-A(G-F_1)\}+\right.\\
&\quad \left.+A(A_1-B)\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}-3C_1E(A_1-B)^2\right],
\end{aligned}$$

waarin $Q=\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3BC_1(A_1-B)^2$ is.

Er blijven dus nog vier voorwaardensvergelijkingen over,

$$H = pe_1 + qe + 2Acc_1, \quad \ldots \ldots \quad (e)$$

$$K = p(ae_1 + 2cd_1) + q(a_1e + 2c_1d), \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

$$K - H_1 = 2(p - q)(cd_1 - c_1d), \quad \ldots \ldots \quad (g)$$

$$K_1 = pbe_1 + qb_1e + Add_1 \quad \ldots \ldots \quad (h).$$

7. Het vorige geldt niet, wanneer $A = 0$ is. Omdat in dat geval $a + a_1$, bb_1, $ab_1 + a_1b$ en $b + b_1 + 4aa_1$ niet oneindig mogen worden, is tegelijk

$$A = 0, \quad 3B + A_1 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D + 3C_1 = 0, \quad B_1 + C = 0 \quad \ldots \quad \text{(VI)}.$$

Omdat nu $q = -p$ moet zijn, wordt het stel bruikbare vergelijkingen

$$\begin{array}{lll}
3B = (a_1 - a)p, & G = \{2(ad_1 - a_1d) + (b_1c - bc_1)\}p, & F_1 = (bc_1 - b_1c)p, \\
3C = (b_1 - b)p, & H = (e_1 - e)p, & G_1 = (bd_1 - b_1d)p, \\
D = (ab_1 - a_1b)p, & K = \{(ae_1 - a_1e) + 2(cd_1 - c_1d)\}p, & H_1 = \{(ae_1 - a_1e) - 2(cd_1 - c_1d)\}p, \\
E = (c_1 - c)p, & L = (ce_1 - c_1e)p, & K_1 = (be_1 - b_1e)p, \\
F = (d_1 - d)p, & E_1 = \{2(ac_1 - a_1c) + (d - d_1)\}p, & L_1 = (de_1 - d_1e)p.
\end{array}$$

Hieruit volgt vooreerst

$$\left.\begin{array}{llll}
3Ca - D = 3Bb, & 3Ea - F - E_1 = 3Bc, & 2Fa - G - F_1 = 3Bd, & 3Ha - K - H_1 = 3Be, \\
3Ca_1 - D = 3Bb_1, & 3Ea_1 - F - E_1 = 3Bc_1, & 2Fa_1 - G - F_1 = 3Bd_1, & 3Ha_1 - K - H_1 = 3Be_1;
\end{array}\right\} \quad . \, (6)$$

en daaruit wederom

$$F_1 = (bc_1 - b_1c)p = \{3C(F + E_1) - 2DE\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$G_1 = (bd_1 - b_1d)p = \{3C(G + F_1) - 2DF\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$K_1 = (be_1 - b_1e)p = \{3C(K + H_1) - 2DH\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$K - H_1 = 4(cd_1 - c_1d)p = \{E(G + F_1) - F(F + E_1)\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$L = (ce_1 - c_1e)p = \{E(K + H_1) - H(F + E_1)\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$L_1 = (de_1 - d_1e)p = \{F(K + H_1) - H(G + F_1)\} : 4(a_1 - a)p.$$

Als men nu in elk dezer zes vergelijkingen $(a_1 - a)p = 3B$ substitueert, ontstaan er zes voorwaardensvergelijkingen. Derhalve blijven er slechts negen vergelijkingen over voor de bepaling van de elf onbekende grootheden; en het vraagstuk is derhalve onbepaald.

8. De uitkomsten van N°. 6 zijn evenzeer ongeldig, zoodra $A_1 = B$ is. Alsdan geeft $b + b_1$

$$(C - B_1)B + (C_1 - D)A = 0 \qquad \text{en} \quad p - q = {}^3/_2 \, \frac{A_1 - B}{a - a_1};$$

dus omdat

$$(a - a_1)^2 = \frac{(3B + A_1)^2(B - A_1) - 8A\{B_1(3B - A_1) - 2CA_1 - (C_1 - D)A\}}{4A^2(B - A_1)},$$

in den regel niet verdwijnt, moet $p = q$ zijn. Dit geeft dadelijk

$$A_1 = B,\ \ B_1 = C,\ \ C_1 = D,\ \ E_1 = F,\ \ F_1 = G_1,\ \ H_1 = K_1; \quad \ldots\ldots \text{(VII)}$$

zoodat aan de eerst gevonden voorwaardensvergelijking wordt voldaan. Men houdt nu over

$$\begin{array}{lll} A = 2p, & F = (d + d_1 + 2ac_1 + 2a_1c)p, & D_1 = 2bb_1p, \\ B = (a + a_1)p, & G = (2ad_1 + 2a_1d + bc_1 + b_1c)p, & G_1 = 3(bd_1 + b_1d)p, \\ 3C = (b + b_1 + 4aa_1)p, & H = (e + e_1 + 4cc_1)p, & K_1 = (be_1 + b_1e + 4dd_1)p, \\ D = (ab_1 + a_1b)p, & K = (ae_1 + a_1e + 2cd_1 + 2c_1d)p, & L_1 = (de_1 + d_1c)p. \\ E = 3(c + c_1)p, & L = (ce_1 + c_1e)p, & \end{array}$$

Vooreerst is

$$(a - a_1)b = (b + b_1)a - (ab_1 + a_1b) = (b + b_1)a - \frac{2D}{A},$$

$$(a_1 - a)b_1 = (b + b_1)a_1 - (ab_1 + a_1b) = (b + b_1)a_1 - \frac{2D}{A};$$

haar produkt geeft

$$(b + b_1)^2 aa_1 - \frac{2D}{A}(b + b_1)(a + a_1) + \frac{4D^2}{A^2} = -bb_1\{(a + a_1)^2 - 4aa_1\},$$

of, als men

$$b + b_1 = \frac{6C}{A} - 4aa_1,\ \ a + a_1 = \frac{2B}{A},\ \ bb_1 = \frac{D_1}{A}$$

substitueert,

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{3C}{A} - 2aa_1\right)^2 aa_1 - \frac{2BD}{A^2}\left(\frac{3C}{A} - 2aa_1\right) + \frac{D^2}{A^2} + \frac{D_1}{A^3}(B^2 - aa_1A^2); \\ \text{terwijl verder} \\ b + b_1 = \frac{6C}{A} - 4aa_1,\quad bb_1 = \frac{D_1}{A},\quad a + a_1 = \frac{2B}{A} \text{ is.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (7)$$

Bovendien is hier

$$p = \frac{1}{2}A \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (7^a)$$

Dit geeft ons

$$\frac{2F}{A} = d + d_1 + 2(ac_1 + a_1c), \qquad \frac{2G}{A} = 2(ad_1 + a_1d) + (bc_1 + b_1c),$$

waaruit volgt

$$-2(a - a_1)d = \frac{F}{A}4a_1 - 2\frac{G}{A} + (b - 4a^2)c_1 + (b_1 - 4aa_1)c,$$

$$2(a - a_1)d_1 = \frac{F}{A}4a_1 - 2\frac{G}{A} + (b - 4aa_1)c_1 + (b_1 - 4a_1^2)c;$$

en hiermede geeft de waarde van G_1,

$$\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)=\frac{2G}{A}(b-b_1)+\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)+(bb_1-b^2+4aa_1b-4a^2b_1)c_1-(bb_1-b_1^2+4aa_1b_1-4a_1^2b)c.$$

Nu kan men uit deze en de vergelijking $\frac{2E}{A}=c+c_1$ de c en c_1 oplossen,

$$\left.\begin{aligned}&\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}\,c=\frac{2E}{A}\{b(b-b_1)+4a(ab_1-a_1b)\}+\\&\qquad+\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)-\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)-\frac{2G}{A}(b-b_1),\\&\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}\,c_1=\frac{-2E}{A}\{b_1(b-b_1)+4a_1(ab_1-a_1b)-\\&\qquad-\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)+\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)+\frac{2G}{A}(b-b_1);\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(7^b)$$

en hiermede worden de vorige vergelijkingen voor d en d_1

$$\left.\begin{aligned}&2\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}(a-a_1)\,d=\frac{4Fa-2G}{A}\{b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}+\\&\quad+\frac{8E}{A}(ab_1-a_1b)(a-a_1)b+\{4a(a-a_1)-(b-b_1)\}\{\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)-\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)-\frac{2G}{A}(b-b_1)\},\\&2\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}(a-a_1)\,d_1=\frac{2G-4Fa_1}{A}\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}-\\&\quad-\frac{8E}{A}(ab_1-a_1b)(a-a_1)b_1-\{4a_1(a-a_1)-(b-b_1)\}\{\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)-\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)-\frac{2G}{A}(b-b_1)\}.\end{aligned}\right\}(7^c)$$

Verder leveren de waarden van L en L_1

$$e=\frac{2}{A}\,\frac{L_1c-Ld}{cd_1-c_1d},\qquad e_1=\frac{2}{A}\,\frac{Ld_1-L_1c_1}{cd_1-c_1d}\ldots\ldots\ldots\ldots(7^d)$$

Derhalve blijven er over als voorwaardensvergelijkingen

$$H=\frac{L_1(c-c_1)-L(d-d_1)}{cd_1-c_1d},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a_1)$$

$$K=\frac{L(ad_1-a_1d)-L_1(ac_1-a_1c)}{cd_1-c_1d}+A(cd_1+c_1d),\ldots\ldots\ldots(b_1)$$

$$K_1=\frac{L(bd_1-b_1d)-L_1(bc_1-b_1c)}{cd_1-c_1d}+2Add_1.\ldots\ldots\ldots\ldots(c_1)$$

9. Eindelijk heeft men nog het geval te onderzoeken, dat de vergelijking (5^d) twee gelijke wortels $a = a_1$ heeft: alsdan wordt de noemer in de waarden van p en q nul. Uit de waarde voor $p-q$, in de laatste der vergelijkingen (5^f) gevonden, volgt dan

$$A_1 = B. \qquad \text{(VIII)}$$

Verder zullen alsdan de waarden der wortels b en b_1 der vergelijking (5^e) mede nul tot noemer verkrijgen. Laat ons dus zien, wat de coëfficiënten ons geven bij onze onderstelling $a_1 = a$.

$$\begin{aligned}
A &= p + q, \\
3B &= 3a(p + q), \\
3C &= pb_1 + qb + (p + q)2a^2, \\
D &= (pb_1 + qb)a, \\
E &= p(c + 2c_1) + q(c_1 + 2c), \\
F &= pd_1 + qd + (p + q)a(c + c_1), \\
G &= pcb_1 + qbc_1 + 2a(pd_1 + qd), \\
H &= p(e_1 + 2cc_1) + q(e + 2cc_1), \\
K &= 2(pcd_1 + qc_1d) + a(pe_1 + qe), \\
L &= pce_1 + qc_1e,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3B_1 &= pb + qb_1 + (p + q)2a^2, \\
3C_1 &= pa(b_1 + 2b) + qa(b + 2b_1), \\
D_1 &= (p + q)bb_1, \\
E_1 &= 2a(pc_1 + qc) + (pd + qd_1), \\
F_1 &= (p + q)a(d + d_1) + pbc_1 + qb_1c, \\
G_1 &= p(2bd_1 + b_1d) + q(2b_1d + bd_1), \\
H_1 &= a(pc_1 + qe) + 2(pc_1d + qcd_1), \\
K_1 &= p(be_1 + 2dd_1) + q(b_1e + 2dd_1), \\
L_1 &= pde_1 + qd_1e.
\end{aligned}$$

Dadelijk verkrijgt men

$$a = \frac{B}{A} \qquad (8)$$

en tevens

$$pb_1 + qb = \frac{AD}{B}, \quad 3B_1 + \frac{AD}{B} = (p + q)(b + b_1 + 2a^2) = A(b + b_1 + 2a^2);$$

waaruit volgt

$$b + b_1 = \frac{3B_1}{A} + \frac{D}{B} - \frac{2B^2}{A^2}.$$

Omdat nog $bb_1 = \frac{D_1}{A}$ is, worden b en b_1 bepaald als wortels der vergelijking

$$\beta^2 + \left(\frac{2B^2}{A^2} - \frac{3B_1}{A} - \frac{D}{B}\right)\beta + \frac{D_1}{A} = 0. \qquad (8^a)$$

Verder is

$$p = \left(b - \frac{D}{B}\right)\frac{A}{b - b_1} \quad \text{en} \quad q = \left(\frac{D}{B} - b_1\right)\frac{A}{b - b_1}, \qquad (8^b)$$

terwijl de vergelijkingen voor C en C_1 de voorwaardensvergelijkingen geven

$$3\,C = \frac{D}{a} + A\,.\,2\,a^2 = \frac{A\,D}{B} + \frac{2\,B^2}{A}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a_2)$$

$$\frac{3\,C_1\,A}{B} = 2\,A\,(b + b_1) - D = 6\,B_1 + \frac{2\,A\,D}{B} - \frac{4\,B^2}{A} - D; \quad \ldots\ldots \quad (b_2)$$

en hiermede wordt voldaan aan de voorwaarde, die uit de vergelijking (5^d) zoude volgen,

$$(3\,B + A_1)^2\,(B - A_1) - 8\,A\,\{B_1\,(3\,B - A_1) - (C_1 - D)\,A - 2\,A_1 C\} = 0,$$

of naar (VIII),

$$6\,A\,B\,B_1 - 3\,A^2\,(C_1 - D) - 6\,A\,B\,C = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a\,b_2)$$

Vervolgens is

$$G - 2\,F_1 + 2\,E_1\,a = c\,(p\,b_1 + 4\,a^2\,q - 2\,q\,b_1) + c_1\,(q\,b + 4\,a^2\,p - 2\,p\,b)\,;$$

verbindt men deze met de waarde van E, zoo komt er

$$\left.\begin{aligned}
c &= \frac{(2\,p + q)\,(G - 2\,F_1 + 2\,E_1\,a) - E\,(q\,b + 4\,a^2\,p - 2\,p\,b)}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)} = \\
&= \frac{\left(3Ab - 3B_1 - \frac{2AD}{B} + \frac{2B^2}{A}\right)\left(G - 2F_1 + 2\frac{BE_1}{A}\right) - E\left[b\left(\frac{AD}{B} - 6B_1 + \frac{8B^2}{A}\right) - \frac{4BD}{A} + D_1\right]}{3\,A\left(\frac{3\,B_1\,D}{B} - \frac{2\,B\,D}{A} - D_1\right) + 2\left(\frac{4\,B^2}{A} - \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)\left(\frac{2\,B^2}{A} + \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)}, \\
c_1 &= \frac{E\,(p\,b_1 + 4\,a^2\,q - 2\,q\,b_1) - (p + 2\,q)\,(G - 2\,F_1 + 2\,E_1\,a)}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)} = \\
&= \frac{\left(3Ab_1 - 3B_1 - \frac{2AD}{B} + \frac{2B^2}{A}\right)\left(G - 2F_1 + 2\frac{BE_1}{A}\right) - E\left[b_1\left(\frac{AD}{B} - 6B_1 + \frac{8B^2}{A}\right) - \frac{4BD}{A} + D_1\right]}{3\,A\left(\frac{3\,B_1\,D}{B} - \frac{2\,B\,D}{A} - D_1\right) + 2\left(\frac{4\,B^2}{A} - \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)\left(\frac{2\,B^2}{A} + \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)}.
\end{aligned}\right\} \quad (8^a)$$

Daarop geven F en G_1

$$A\,[\,(b_1 p - b\,q) - p\,q\,(b - b_1)]\,d =$$

$$= G_1 p - (2p + q)\,b\left[F - (p + q)\,a\,\frac{(p-q)(G - 2F_1 + 2\,E_1 a) + E\,\{-4a^2(p-q) + (b + b_1)(p-q) - (bp - b_1 q)\}}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)}\right],$$

$$[\,A\,(b_1 p - b\,q) - p\,q\,(b - b_1)]\,d_1 =$$

$$= -G_1 q + (p + 2q)\,b_1\left[F - (p + q)\,a\,\frac{(p-q)(G - 2F_1 + 2\,E_1 a) + E\{-4a^2(p-q) + (b + b_1)(p-q) - (bp - b_1 q)\}}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)}\right];$$

of na herleiding,

$$\left[2D_1 - \frac{6B_1D}{B} - \frac{AD^2}{B^2} + \frac{4BD}{A}\right]d = G_1\left(b - \frac{D}{B}\right) - \left\{\left(6B_1 + \frac{AD}{B} - \frac{4B^2}{A}\right)b - 3D_1\right\}$$

$$\left\{F - B\frac{\left(\frac{3B_1}{A} - \frac{D}{B} - \frac{2B^2}{A^2}\right)\left(G - 2F_1 + \frac{2BE_1}{A}\right) + E\left\{\left(\frac{3B_1}{A} - \frac{D}{B} - \frac{2B^2}{A^2}\right)\left(\frac{6B_1}{A} + \frac{D}{B} - \frac{8B^2}{A}\right) + \frac{2D}{B}\left(\frac{3B_1}{A} - \frac{2B^2}{A^2}\right) - \frac{2D_1}{A}\right\}}{3A\left(\frac{3B_1D}{B} - \frac{2BD}{A} - D_1\right) + 2\left(\frac{4B^2}{A} - \frac{AD}{B} - 3B_1\right)\left(\frac{2B^2}{A} + \frac{AD}{B} - 3B_1\right)}\right\},$$

$$\left[2D_1 - \frac{6B_1D}{B} - \frac{AD^2}{B^2} + \frac{4BD}{A}\right]d_1 = G_1\left(b_1 - \frac{D}{B}\right) - \left\{\left(6B_1 + \frac{AD}{B} - \frac{4B^2}{A}\right)b_1 - 3D_1\right\}$$

$$\left\{F - B\frac{\left(\frac{3B_1}{A} - \frac{D}{B} - \frac{2B^2}{A^2}\right)\left(G - 2F_1 + \frac{2BE_1}{A}\right) + E\left\{\left(\frac{3B_1}{A} - \frac{D}{B} - \frac{2B^2}{A^2}\right)\left(\frac{6B_1}{A} + \frac{D}{B} - \frac{8B}{A}\right) - \frac{2D}{B}\left(\frac{3B_1}{A} - \frac{2B^2}{A^2}\right) - \frac{2D_1}{A}\right\}}{3A\left(\frac{3B_1D}{B} - \frac{2BD}{A} - D_1\right) + 2\left(\frac{4B^2}{A} - \frac{AD}{B} - 3B_1\right)\left(\frac{2B^2}{A} + \frac{AD}{B} - 3B_1\right)}\right\};$$

en hierbij blijven als voorwaarden de vergelijkingen voor G en E_1

$$G = p b_1 c + q b c_1 + 2a(p d_1 + q d), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a_3)$$

$$E_1 = 2a(qc + pc_1) + (pd + qd_1). \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b_3)$$

Eindelijk volgt uit de vergelijkingen voor L en L_1,

$$e = \frac{1}{q}\,\frac{L_1 c - L d}{c d_1 - c_1 d}, \qquad e_1 = \frac{1}{p}\,\frac{L d_1 - L_1 c_1}{c d_1 - c_1 d}; \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8^b)$$

waarbij de vier voorwaardensvergelijkingen

$$H = pe_1 + qe + 2Acc_1, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c_3)$$

$$K = 2(pcd_1 + qc_1d) + a(pe_1 + qe), \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (d_3)$$

$$H_1 = a(pe_1 + qe) + (pc_1d + qcd_1), \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (e_3)$$

$$K_1 = pbc_1 + qb_1e + 2Add_1; \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (f_3)$$

waar men ook voor de beide middelste stellen kan

$$K - Ha = 2(pcd_1 + qc_1d) - 2Aacc_1, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g_3)$$

$$K - H_1 = (2p - q)cd_1 + (2q - p)c_1d \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h_3).$$

10. Zij de integraalvergelijking

$$(x + ay + b)^p\ (x + a_1y + b_1)^q\ (x + a_2y + b_2)^r\ (x + a_3y + b_3)^s = P; \quad . \ . \ (C)$$

dan is

$$p\frac{1 + ay'}{x + ay + b} + q\frac{1 + a_1y'}{x + a_1y + b_1} + r\frac{1 + a_2y'}{x + a_2y + b_2} + s\frac{1 + a_3y'}{x + a_3y + b_3} = 0,$$

of

$$p(1+ay')[x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2y+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)xy^2+a_1a_2a_3y^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+$$
$$+(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)xy+(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)y^2+$$
$$+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+(a_1b_2b_3+a_2b_1b_3+a_3b_1b_2)y+b_1b_2b_3]$$
$$+q(1+a_1y')[x^3+(a_3+a_2+a)x^2y+(a_3a_2+a_3a+a_2a)xy^2+a_3aa_2y^3+(b_3+b+b_2)x^2+$$
$$+(a_2b_3+a_2b+a_3b_2+a_3b+ab_2+ab_3)xy+(a_2a_3b+a_2ab_3+a_3ab_2)y^2+$$
$$+(b_2b_3+b_2b+b_3b)x+(a_2b_3b+a_3b_2b+ab_2b_3)y+b_2b_3b]$$
$$+r(1+a_2y')[x^3+(a_3+a+a_1)x^2y+(a_3a+a_3a_1+aa_1)xy^2+a_3aa_1y^3+(b_3+b+b_1)x^2+$$
$$+(a_3b+a_3b_1+ab_3+ab_1+a_1b_3+a_1b)xy+(a_3ab_1+a_3a_1b+a_1ab_3)y^2+$$
$$+(b_3b+b_3b_1+bb_1)x+(a_3bb_1+ab_3b_1+a_1b_3b)y+b_3bb_1]$$
$$+s(1+a_3y')[x^3+(a+a_1+a_2)x^2y+(aa_1+aa_2+a_1a_2)xy^2+aa_1a_2y^3+(b+b_1+b_2)x^2+$$
$$+(ab_1+ab_2+a_1b+a_1b_2+a_2b+a_2b_1)xy+(aa_1b_2+aa_2b_1+a_2a_1b)y^2+$$
$$+(bb_1+bb_2+b_1b_2)x+(ab_1b_2+a_1bb_2+a_2bb_1)y+bb_1b_2].$$

Daar deze moet zijn van den vorm

$$(Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+Ex^2+2Fxy+Gy^2+Hx+Ky+L)dx$$
$$+(A_1x^3+3B_1x^2y+3C_1xy^2+D_1y^3+E_1x^2+2F_1xy+G_1y^2+H_1x+K_1y+L_1)dy=0, \quad \text{(IX)}$$

heeft men daartoe

$$A=p+q+r+s,$$
$$3B=p(a_1+a_2+a_3)+q(a_2+a_3+a)+r(a_3+a+a_1)+s(a+a_1+a_2),$$
$$3C=p(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+q(a_2a_3+a_2a+a_3a)+r(a_3a+a_3a_1+aa_1)+s(aa_1+aa_1+a_1a_2),$$
$$D=pa_1a_2a_3+qa_2a_3a+ra_3aa_1+saa_1a_2,$$
$$E=p(b_1+b_2+b_3)+q(b_2+b_3+b)+r(b_3+b+b_1)+s(b+b_1+b_2),$$
$$2F=p(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)+q(a_2b_3+a_2b+a_3b_2+a_3b+ab_2+ab_3)+$$
$$+r(a_3b+a_3b_1+ab_3+ab_1+a_1b_3+a_1b)+s(ab_2+ab_2+a_1b+a_1b_2+a_2b+a_2b_2),$$
$$G=p(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)+q(a_2a_3b+a_2ab_3+a_3ab_2)+r(a_3bb_1+a_3a_1b+aa_1b_3)+$$
$$+s(aa_1b_2+aa_2b_1+a_1a_2b),$$
$$H=p(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)+q(b_2b_3+b_2b+b_3b)+r(b_3b+b_3b_1+bb_1)+s(bb_1+bb_2+b_1b_2),$$
$$K=p(a_1b_2b_3+a_2b_3b_3+a_3b_1b_2)+q(a_2b_3b+a_3b_2b+ab_2b_3)+r(a_3bb_1+ab_3b_1+a_1b_3b)+$$
$$+s(ab_1b_2+a_1bb_2+a_2bb_1),$$
$$L=pb_1b_2b_3+qb_2b_3b+rb_3bb_1+sbb_1b_2,$$
$$A_1=pa+qa_1+ra_2+sa_3,$$
$$3B_1=pa(a_1+a_2+a_3)+qa_1(a_2+a_3+a)+ra_2(a_3+a+a_1)+sa_3(a+a_1+a_2),$$
$$3C_1=pa(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+qa_1(a_2a_3+a_2a+a_3a)+ra_2(a_3a+a_3a_1+aa_1)+$$
$$sa_3(aa_1+aa_2+a_1a_2),$$
$$D_1=paa_1a_2a_3+qa_1a_2a_3a+ra_2a_3aa_1+sa_3aa_1a_2,$$

$$E_1 = pa(b_1 + b_2 + b_3) + qa_1(b_2 + b_3 + b) + ra_2(b_3 + b + b_1) + sa_3(b + b_1 + b_2),$$

$$2F_1 = pa(a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2) + qa_1(a_2 b_3 + a_2 b + a_3 b_2 + a_3 b + ab_2 + ab_3) +$$
$$+ ra_2(a_3 b + a_3 b_1 + ab_3 + ab_1 + a_1 b_3 + a_1 b) + sa_3(ab_1 + ab_2 + a_1 b + a_1 b_2 + a_2 b + a_2 b_1),$$

$$G_1 = pa(a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) + qa_1(a_2 a_3 b + a_2 ab_3 + a_3 ab_2) + ra_2(a_3 ab_1 + a_3 a_1 b + aa_1 b_3) +$$
$$+ sa_3(aa_1 b_2 + aa_2 b_1 + a_1 a_2 b),$$

$$H_1 = pa(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + qa_1(b_2 b_3 + b_2 b + b_3 b) + ra_2(b_3 b + b_3 b_1 + bb_1) + sa_3(bb_1 + bb_2 + b_1 b_2),$$

$$K_1 = pa(a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2) + qa_1(a_2 b_3 b + a_3 b_2 b + ab_2 b_3) + ra_2(a_3 bb_1 + ab_3 b_1 + a_1 b_3 b) +$$
$$+ sa_3(ab_1 b_2 + a_1 bb_2 + a_2 bb_1),$$

$$L_1 = pab_1 b_2 b_3 + qa_1 b_2 b_3 b + ra_2 b_3 bb_1 + sa_3 bb_1 b_2.$$

Vooreerst volgt dadelijk

$$\left.\begin{aligned} &\frac{3B + A_1}{A} = a + a_1 + a_2 + a_3, \quad 3\frac{C + B_1}{A} = aa_1 + aa_2 + aa_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3, \\ &\frac{D + 3C_1}{A} = aa_1 a_2 + aa_1 a_3 + aa_2 a_3 + a_1 a_2 a_3, \quad \frac{D_1}{A} = aa_1 a_2 a_3\,; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

zoodat a, a_1, a_2, a_3, de wortels zijn der vergelijking

$$A\alpha^4 - (3B + A_1)\alpha^3 + (C + B_1)3\alpha^2 - (D + 3C_1)\alpha + D_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9^a)$$

Vervolgens is achtereenvolgens

$$\left.\begin{aligned} &3B - Aa = p(-a + a_1 + a_2 + a_3) + q(a_2 + a_3) + r(a_3 + a_1) + s(a_1 + a_2), \\ &Aa^2 - 3Ba + 3C = p(a_1 a_2 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a^2 - aa_2 - aa_3) + qa_2 a_3 + ra_3 a_1 + sa_1 a_2, \\ &Aa^3 - 3Ba^2 + 3Ca - D = p(a_1 a_2 a + a_1 a_3 a + a_2 a_3 a + a^3 - a_1 a^2 - a_3 a^2 - a_2 a^2 - a_1 a_2 a_3) = \\ &\quad = p(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)\,; \end{aligned}\right\} \quad (9^b)$$

derhalve

$$\left.\begin{aligned} &p = \frac{Aa^3 - 3Ba^2 + 3Ca - D}{(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)}\,; \\ &\text{en evenzoo} \\ &q = \frac{Aa_1^3 - 3Ba_1^2 + 3Ca_1 - D}{(a_1 - a)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad r = \frac{Aa_2^3 - 3Ba_2^2 + 3Ca_2 - D}{(a_2 - a)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}, \quad s = \frac{Aa_3^3 - 3Ba_3^2 + 3Ca_3 - D}{(a_3 - a)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}. \end{aligned}\right\} \quad (9^c)$$

Bij de beschouwing van ons twintigtal vergelijkingen, ziet men dat telkens, als men in het algemeen voor eene letter X stellende, $Xa - X_1$ neemt, de p geëlimineerd wordt; evenzoo bij $Xa_1 - X_1$, $Xa_2 - X_1$, $Xa_3 - X_1$, worden de q, r, s geëlimineerd.

Nu is

$$3a^2(Aa-A_1)-6a(Ba-B_1)-3(Ca-C_1)=3\left[Aa^3-(A_1+2B)a^2+(2B_1+C)a-C_1\right]=$$
$$=q(a-a_1)(a_2a_3-aa_2-aa_3+a^2)+r(a-a_2)(a_3a_1-aa_3-aa_1+a^2)+s(a-a_3)(a_1a_2-aa_1-aa_2+a^2)=$$
$$=(q+r+s)(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)=(A-p)(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)=$$
$$=A(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)-Aa^3+3Ba^2-3Ca-D,$$

met toepassing van de uitkomst (9^c). Evenzoo is

$$a^2(Ea-E_1)-2a(Fa-F_1)+(Ga-G_1)=q(a-a_1)(a_2a_3-aa^2-aa_3+a^2)b+$$
$$+r(a-a_2)(a_3a_1-aa_3-aa_1+a^2)b+s(a-a_3)(a_1a_2-aa_1-aa_2+a^2)b;$$

en dit geeft nu

$$b=\frac{1}{3}\frac{Ea^3-(E_1+2F)a^2+(2F_1+G)a-G_1}{Aa^3-(A_1+2B)a^2+(2B_1+C)a-C_1};$$

op dezelfde wijze vindt men

$$b_1=\frac{1}{3}\frac{Ea_1^3-(E_1+2F)a_1^2+(2F_1+G)a_1-G_1}{Aa_1^3-(A_1+2B)a_1^2+(2B_1+C)a_1-C_1},\quad b_2=\frac{1}{3}\frac{Ea_2^3-(E_1+2F)a_2^2+(2F_1+G)a_2-G_1}{Aa_2^3-(A_1+2B)a_2^2+(2B_1+C)a_2-C_1},$$
$$b_3=\frac{1}{3}\frac{Ea_3^2-(E_1+2F)a_3^2+(2F_1+G)a_3-G_1}{Aa_3^3-(A_1+2B)a_3^2+(2B_1+C)a_3-C_1}. \qquad (9^d)$$

En hiermede zijn de twaalf grootheden a, a_1, a_2, a_3, p, q, r, s, b, b_1, b_2, b_3 gevonden. Er blijven dus acht der twintig vergelijkingen, als voorwaardensvergelijkingen over. Deze zijn vooreerst de niet gebruikte

$$H=,\quad K=,\quad L=,\quad H_1=,\quad K_1=,\quad L_1=\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a_4)$$

Maar bovendien moeten er nog twee bestaan tusschen de gebruikte grootheden E, F, G, E_1, F_1, G_1. Schrijven wij deze daartoe in den vorm

$$E=b_1(p+r+s)+b_2(p+q+s)+b_3(p+q+r)+b(q+r+s),$$
$$2F=b_1\{p(a_2+a_3)+r(a_3+a)+s(a+a_2)\}+b_2\{p(a_1+a_3)+q(a_3+a)+s(a+a_1)\}+$$
$$+b_3\{p(a_1+a_2)+q(a_2+a)+r(a+a_1)\}+b\{q(a_2+a_3)+r(a_3+a_1)+s(a_1+a_2)\},$$
$$G=b_1(pa_2a_3+ra_3a+saa_2)+b_2(pa_1a_3+qa_3a+saa_1)+b_3(pa_1a_2+qa_2a+raa_1)+$$
$$+b(qa_2a_3+ra_3a_1+sa_1a_2),$$
$$E_1=b_1(pa_1+ra_2+sa_3)+b_2(pa+qa_1+sa_3)+b_3(pa+qa_1+ra_2)+b(qa_1+ra_2+sa_3),$$
$$2F_1=b_1\{pa(a_2+a_3)+ra_2(a_3+a)+sa_3(a+a_2)\}+b_2\{pa(a_1+a_2)+qa_1(a_3+a)+sa_3(a_1+a)\}+$$
$$+b_3\{pa(a_1+a_2)+qa_1(a_2+a)+ra_2(a+a_1)\}+b\{qa_1(a_2+a_3)+ra_2(a_3+a_1)+sa_3(a_1+a_2)\},$$
$$G_1=b_1(p+r+s)aa_2a_3+b_2(p+q+s)aa_1a_3+b_3(p+q+r)aa_1a_2+b(q+r+s)a_1a_2a_3;$$

De eliminatie moet hier dus twee determinanten geven, beide gelijk nul. Vorm daartoe de matrix

1ste kolom.	2de kolom.
$p + r + s$	$p + q + s$
$p a_2 a_3 + r a_3 a + s a a_2$	$p a_1 a_3 + q a_3 a + s a a_1$
$p a + r a_2 + s a_3$	$p a + q a_1 + s a_3$
$(p + r + s) a a_2 a_3$	$(p + q + s) a a_1 a_3$
$p (a_2 + a_3) + r (a_3 + a) + s (a + a_2)$	$p (a_1 + a_3) + q (a_3 + a) + s (a + a_1)$
$p a (a_2 + a_3) + r a_2 (a_3 + a) + s a_3 (a + a_2)$	$p a (a_1 + a_3) + q a_1 (a_3 + a) + s a_3 (a + a_1)$

3de kolom.	4de kolom.	5de kolom.
$p + q + r$	$q + r + s$	$-E$
$p a_1 a_2 + q a_2 a + r a a_1$	$q a_2 a_3 + r a_3 a_1 + s a_1 a_2$	$-G$
$p a + q a_1 + r a_2$	$q a_1 + r a_2 + s a_3$	$-E_1$
$(p + q + r) a a_1 a_2$	$(q + r + s) a_1 a_2 a_3$	$-G_1$
$p (a_1 + a_2) + q (a_2 + a) + r (a + a_1)$	$q (a_2 + a_3) + r (a_3 + a_1) + s (a_1 + a_2)$	$-2F$
$p a (a_1 + a_2) + q a_1 (a_2 + a) + r a_2 (a + a_1)$	$q a_1 (a_2 + a_3) + r a_2 (a_3 + a_1) + s a_3 (a_1 + a_2)$	$-2F_1$

Tel alle drie eerste kolommen op bij de vierde, dan wordt deze

$$3(p + q + r + s) = 3A,$$

$$p(a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2) + q(a_3 a + a_2 a + a_2 a_3) + r(a_3 a + a a_1 + a_1 a_3) + s(a a_2 + a a_1 + a_1 a_2) = 3C,$$

$$3(p a + q a_1 + r a_2 + s a_3) = 3A_1,$$

[illegible] C_1.

$$2p(a_1 + a_2 + a_3) + 2q(a_2 + a_3 + a) + 2r(a_3 + a + a_1) + 2s(a + a_1 + a_2) = 6B,$$

$$2pa(a_1 + a_2 + a_3) + 2q a_1(a_2 + a_3 + a) + 2r a_2(a_3 + a + a_1) + 2s a_3(a + a_1 + a_2) = 6B_1.$$

Vermenigvuldig de 1ste, 2de en 3de kolom met a_1, a_2, a; tel dit alles op bij het produkt van a_3 met de 3de kolom; dan wordt deze

$$p(a_1 + a_2 + a_3) + q(a_2 + a_3 + a) + r(a_3 + a + a_1) + s(a + a_1 + a_2) = 3B,$$

$$3(p a_1 a_2 a_3 + q a_2 a_3 a + r a_3 a a_1 + s a a_1 a_2) = 3D,$$

$$pa(a_1 + a_2 + a_3) + q a_1(a_2 + a_3 + a) + r a_2(a_3 + a + a_1) + s a_3(a + a_1 + a_2) = 3B_1,$$

$$3(p a a_1 a_2 a_3 + q a_1 a_2 a_3 a + r a_2 a_3 a a_1 + s a_3 a a_1 a_2) = 3D_1,$$

$$2\{p(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + q(a_2 a_3 + a_2 a + a_3 a) + r(a_3 a + a_3 a_1 + a a_1) + s(a a_1 + a a_2 + a_1 a_2)\} = 6C,$$

[illegible] $= 6C_1$.

Tel de 1ste, 3de en 4de kolom bij het produkt van (-2) met de 2de kolom; deze wordt daardoor

$$3\,r \qquad\qquad = 3\,r,$$

$$p(a_2a_3 + a_1a_2 - 2a_1\,a_3) + q\,(a_2a + a_2a_3 - 2a_3a) + r\,(a_3a + aa_1 + a_1a_3) + s(aa_2 + a_1a_2 - 2a\,a_1) =$$
$$= 3\,C - 3\,\frac{D - r\,a\,a_1\,a_3}{a_2} = 3\,C - \frac{3\,D}{a_2} + \frac{3\,r\,D_1}{A\,a_2^2},$$

$$3\,r\,a_2 \qquad\qquad = 3\,r\,a_2,$$

$$pa(a_2a_3 + a_1a_2 - 2a_1a_3) + qa_1(aa_2 + a_2a_3 - 2a_3a) + ra_2(a_3a + aa_1 + a_1a_3) + sa_3(aa_2 + a_1a_2 - 2aa_1) =$$
$$= 3\,C_1 - 3\,(A - r)\,\frac{D_1}{Aa_2},$$

$$p\,(2\,a_2 - a_3 - a_1) + q\,(2\,a_2 - a - a_3) + 2\,r\,(a + a_3 + a_1) + s\,(2\,a_2 - a - a_1) =$$
$$= 3\,a_2\,(A - 2\,r) - 3\,B + 3\,r\,\frac{3\,B + A_1}{A},$$

$$p\,a\,(2\,a_2 - a_3 - a_1) + q\,a_1\,(2\,a_2 - a \quad - a_3) + 2\,r\,a_2\,(a + a_3 + a_1) + s\,a_3\,(2\,a_2 - a - a_1) =$$
$$= 3\,a_2\,(A_1 - 2\,r\,a_2) - 3\,B_1 + 3\,r\,a_2\,\frac{3\,B + A_1}{A}.$$

Vermenigvuldig nog de 2[de], 3[de], 4[de] kolommen met $-2\,a_2$, a_3, a, en tel alles op bij het produkt van a_1 met de eerste kolom, dan wordt deze

$$p\,(a_1 - 2a_2 + a_3) + q\,(-2a_2 + a_3 + a) + r(a_1 + a_3 + a) + s(a_1 - 2a_2 + a) \qquad = 3\,B - 3\,a_2\,(A - r),$$

$$3\,r\,a\,a_1\,a_3 \qquad\qquad = 3\,r\,\frac{D_1}{Aa_2},$$

$$p\,(aa_1 - 2aa_2 + aa_3) + q\,(-2a_1\,a_2 + a_1a_3 + a_1a) + r\,(a_2a_1 + a_2a_3 + a_2a) + s(a_3a_1 - 2a_3a_1 + a_3a) =$$
$$= 3\,B_1 - 3a_2\,(A_1 - r\,a_2),$$

$$3\,r\,a\,a_1\,a_2\,a_3 \qquad\qquad = 2\,r\,\frac{D_1}{A},$$

$$p(-a_1a_2 + 2a_1a_3 - a_2a_3) + q(-a_2a_3 - aa_2 + 2aa_3) + 2r(a_1a_3 + aa_1 + aa_3) + s(2aa_1 - a_1a_2 - aa_2) =$$
$$= -3\,C - \frac{6 + D_1}{a_2^2} + \frac{3D}{A\,a_2}(A + r) + \frac{9r\,C_1}{Aa_2},$$

$$pa(-a_1a_2 + 2a_1a_3 - a_2a_3) + qa_1(-a_2a_3 - aa_2 + 2aa_3) + 2ra_2(a_1a_3 + aa_1 + aa_3) + sa_3(2aa_1 - a_1a_2 - aa_2) =$$
$$= -3\,C_1 + \frac{3\,D_1}{Aa_2}\,(A - 2\,r) + 3\,r\,\frac{D + 3\,C_1}{A}.$$

Nu is reeds alles tot a_2 en r teruggebracht. Ter vereenvoudiging trekke men nog a_2 maal de 2[de] kolom van de 1[ste] af, dan wordt deze eindelijk

$$B - a_2\,A,$$
$$-C\,a_2 + D,$$
$$B_1 - a_2\,A_1,$$
$$-C_1\,a_2 + \frac{D_1}{a_2},$$

$$-a_2^2(A-[illegible])+a_2\left(B-r\frac{3B+A_1}{A}\right)-C+\frac{D(A+r)+3C_1}{Aa_2}-\frac{2rD_1}{a_2^2}=a_2\left(4B+A_1+r\frac{3B+A_1}{A}\right)+$$

$$+(2C-3B_1-\frac{C+B_1}{A}6r)+3\frac{Dr-(A-2r+1)C_1}{a_2A}+D_1\frac{A-4r}{a_2^2},$$

$$2ra_2^3-a_2^2\left(A_1+r\frac{3B+A_1}{A}\right)+B_1a_2-3\left(C_1-r\frac{D+3C_1}{A}\right)+3D_1\frac{A-2r}{Aa_2}=$$

$$=-a_2^2\left([illegible]-r\frac{3B+A_1}{A}\right)+a_2\left(B_1-[illegible]r\frac{C+B_1}{A}\right)+\frac{D+3C_1}{A}5r-3C_1+D_1\frac{3A-8r}{Aa_2};$$

wanneer men de vergelijking (9^a) toepast.

Om nu onze determinanten te verkrijgen, neme men de vier eerste regels en stelle daarboven telkens den 5^{den} en den 6^{den}; dan vermenigvuldige men met a_2^2 om de breuken te verdrijven; eindelijk telle men

$-\frac{D}{A}\times$ den 2^{den} regel bij den 3^{den} en 5^{den} regel,

$-a_2\times$ den 2^{den} regel bij den 4^{den},

en $\left(2a_2-\frac{3B+A_2}{A}\right)a_2^2\times$ den 2^{den} regel bij den 1sten;

en herhale dezelfde bewerking bij de tweede determinante. Op die wijze verkrijgt men

$$\left|\begin{array}{l|l|l|l|l} a_2^3(3AB+3B+A_1)+a_2^2\{8AC+9B_1A-3B^2+A_1B+(C+B_1)6r\}-a_2\{2AD+3AC_1+3C_1-(D+2C_1)3r\}+AD_1(A-[illegible]r+2), & (Aa_2-B)a_2^2, & \{2ABa_2-(3B^2+A_1B-2AC)\}a_2^2, & \{2Aa_2-(3B+A_1)\}a_2^2, & \{2AEa_2-(3BE+A_1E-2AF)\}a_2^2, \\ (-Aa_2+B)A, & r, & AB, & A, & AE, \\ ACa_2^3+ADa_2^2+AD_1a_2-BD_1, & (Ca_2-D)a_2, & ADa_2^2-BD_1, & Ca_2^2-D_1, & AGa_2^2-D_1E, \\ \{Ca_2^2-(A_1+B)a_2+B_1\}A, & 0, & (-Ba_2+B_1)A, & -Aa_2+A_1, & (-Ea_2+E_1)A, \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{array}\right|=0, \quad (b_4)$$

en

$$\left|\begin{array}{l|l|l|l|l} a_2^3\{3A^2+(3B+A_1)r\}+a_2^2\{6AB+AA_1-(C+B_1)6r\}-a_2\{3AC_1+3B^2+A_1B-(D+3C_1)5r\}+AD(3A-8r), & (a_2A_1-3B_1)a_2^2, & \{2ABa_2^2-(3B^2+A_1B-2AC_1)\}a_2^2, & \{2Aa_2+2B_1-(3B+A_1)\}a_2^2, & \{2AEa_2+(3BE+A_1E-2AF_1)\}a_2^2, \\ (-Aa_2+B)A, & r, & AB, & A, & AE, \\ ACa_2^3+ADa_2^2+AD_1a_2-BD_1, & (a_2C-D)a_2, & ADa_2^2+BD_1, & Ca_2^2-D_1, & AGa_2^2-D_1E, \\ \{Ca_2^2-(A_1+B)a_2+B_1\}A_1, & 0, & (-Ba_2+B_1)A_1, & -Aa_2^2+A_1, & (-Ea_2+E_1)A, \\ -ACa_2^2+AD_1a_2+(AB_1-BD_1), & a_2C_1-D_1, & (A_1a_2-B)D_1, & C_1a_2-D_1, & AG_1a_2-ED_1, \end{array}\right|=0; \quad (c_4)$$

waarbij ter wille van de duidelijkheid de regels door komma's en de kolommen door vertikale lijnen zijn gescheiden, en verder ter herleiding der eerste gebruik is gemaakt van de herleiding

$$-2a_2^4A+a_2^3\left(9B+2A_1+r\frac{3B+A_1}{{}}\right)+a_2^2\left(2C+3B_1-\frac{3B+A_1}{A}B-\frac{C+B_1}{A}6r\right)+$$
$$+3a_2\frac{Dr-(A-2r+1)C_1}{A}+D_1(A-4r)=a_2^3\left(3B+\frac{3B+A_1}{A}\right)+$$
$$+a_2^2\left\{C+9B_1-\frac{3B+A_1}{A}B-\frac{C+B_1}{A}6r\right\}-a_2\left\{2D+3C_1-3\frac{Dr+(2r-1)C_1}{A}\right\}+D_1(A-4r+2),$$

waarvoor weder van (9^a) is gebruik gemaakt.

De determinanten (b_4) en (c_4) bevatten nu slechts de a_2 en r, die later door middel van substitutie uit (9^a) en (9^c) verdwijnen.

11. Deze oplossing gaat niet door, wanneer $A=0$ is. Tengevolge van de vergelijkingen (9) moet dan ook

$$3B+A_1=0, \qquad C+B_1=0, \qquad D+3C_1=0, \qquad D_1=0$$

zijn; men kan dus A_1, B_1, C_1 en D_1 als afhankelijke betrekkingen beschouwen.

Gebruikt men dan de onderstelling $A=0=p+q+r+s$ om de s overal te elimineeren, zoo behoudt men

$$3B=p(a_3-a)+q(a_3-a_1)+r(a_3-a_2),$$
$$3C=p(a_3-a)(a_1+a_2)+q(a_3-a_1)(a+a_2)+r(a_3-a_2)(a+a_1),$$
$$D=p(a_3-a)a_1a_2+q(a_3-a_1)aa_2+r(a_3-a_2)aa_1,$$
$$E=p(b_3-b)+q(b_3-b_1)+r(b_3-b_2),$$
$$2F=p\{(a_3-a)(b_1+b_2)+(b_3-b)(a_1+a_2)\}+q\{(a_3-a_1)(b+b_2)+(b_3-b_1)(a+a_2)\}+$$
$$+r\{(a_3-a_2)(b+b_1)+(b_3-b_2)(a+a_1)\},$$
$$G=p\{(a_3-a)(a_1b_2+a_2b_1)+(b_3-b)a_1a_2\}+q\{(a_3-a_1)(ab_2+a_2b)+(b_3-b_1)aa_2\}+$$
$$+r\{(a_3-a_2)(ab_1+a_1b)+(b_3-b_2)aa_1\},$$
$$H=p(b_3-b)(b_1+b_2)+q(b_3-b_1)(b+b_2)+r(b_3-b_2)(b+b_1),$$
$$K=p\{(b_3-b)(a_1b_2+a_2b_1)+(a_3-a)b_2b_1\}+q\{(b_3-b_1)(ab_2+a_2b)+(a_3-a_1)bb_2\}+$$
$$+r\{(b_3-b_2)(ab_1+a_1b)+(a_3-a_2)bb_1\},$$
$$L=p(b_3-b)b_1b_2+q(b_3-b_1)bb_2+r(b_3-b_2)bb_1,$$
$$E_1=p\{(ab_3-a_3b)-(a_3-a)(b_1+b_2)\}+q\{(a_1b_3-a_3b_1)-(a_3-a_1)(b+b_2)\}+$$
$$+r\{(a_2b_3-a_3b_2)-(a_3-a_2)(b+b_1)\},$$
$$2F_1=p\{(ab_3-a_3b)(a_1+a_2)-(a_3-a)(a_1b_2+a_2b_1)\}+q\{(a_1b_3-a_3b_1)(a+a_2)-(a_3-a_1)(ab_2+a_2b)\}+$$
$$+r\{(a_2b_3-a_3b_2)(a+a_1)-(a_3-a_2)(ab_1+a_1b)\},$$
$$G_1=p(ab_3-a_3b)a_1a_2+q(a_1b_3-a_3b_1)aa_2+r(a_2b_3-a_3b_2)aa_1,$$

$$H_1 = p\{(ab_3 - a_3 b)(b_1 + b_2) - (a_3 - a) b_1 b_2\} + q\{(a_1 b_3 - a_3 b_1)(b + b_2) - (a_3 - a_1) b b_2\} + \\ + r\{(a_2 b_3 - a_3 b_2)(b + b_1) - (a_3 - a_2) b b_1\},$$

$$K_1 = p(ab_3 - a_3 b)(a_1 b_2 + a_2 b_1) + q(a_1 b_3 - a_3 b_1)(a b_2 + a_2 b) + r(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a b_1 + a_1 b),$$

$$L_1 = p(ab_3 - a_3 b) b_1 b_2 + q(a_1 b_3 - a_3 b_1) b b_2 + r(a_2 b_3 - a_3 b_2) b b_1.$$

Hieruit volgt

$$Ea - E_1 = p(a_3 - a)(b_1 + b_2 + b) + q\{(a_3 - a_1)(b + b_2) + ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1\} + \\ + r\{(a_3 - a_2)(b + b_1) + ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2\},$$

$$2(Fa - F_1) = p(a_3 - a)(ab_1 + ab_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b + a_2 b) + \\ + q\{(a_3 - a_1)(ab + 2ab_2 + a_2 b) + (a + a_2)(ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1)\} + \\ + r\{(a_3 - a_2)(ab + 2ab_1 + a_1 b) + (a + a_1)(ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2)\},$$

$$Ga - G_1 = p(a_3 - a)(aa_1 b_2 + aa_2 b_1 + a_1 a_2 b) + qa\{(a_3 - a_1)(ab_2 + a_2 b) + (ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1) a_2\} + \\ + ra\{(a_3 - a_2)(ab_1 + a_1 b) + (ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2) a_1\};$$

en verder

$$(Ea - E_1)a - 2(Fa - F_1) = p(a_3 - a)(ab_1 - a_1 b - a_2 b - a_1 b_2 - a_2 b_1) - \\ - q\{(a_3 - a_1)(ab_2 + a_2 b) + a_2(ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1)\} - \\ - r\{(a_3 - a_1)(ab_1 + a_1 b) + a_1(ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2)\},$$

$$\{(Ea - E_1)a - 2(Fa - F_1)\}a + (Ga - G_1) = p(a_3 - a)(a^2 b - aa_1 b - aa_2 b + a_1 a_2 b) = \\ = pb(a_3 - a)(a_2 - a)(a_1 - a).$$

Maar ook is

$$3(Ba - C) = p(a_3 - a)(a - a_2 - a_1) - qa_2(a_3 - a_1) - ra_1(a_3 - a_2),$$

$$(Ba - C)3a + D = p(a_3 - a)(a^2 - a_1 a - a_2 a + a_1 a_2);$$

zoodat men tot de beide uitkomsten geraakt

$$p = \frac{3Ba^2 - 3Ca + D}{(a_3 - a)(a_2 - a)(a_1 - a)} \qquad \ldots\ldots (10)$$

en

$$b = \frac{Ea^3 - (E_1 + 2F)a^2 + (2F_1 + G)a - G_1}{3Ba^2 - 3Ca + D} \qquad \ldots\ldots (10^a)$$

Wegens de symetrie van onze vergelijkingen is het duidelijk, dat men hieruit b_1, b_2, b_3 verkrijgt door a te veranderen in a_1, a_2, a_3; evenzoo q, r en s door in den teller van p dezelfde verandering te brengen, en dan voor den noemer te schrijven $(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a - a_1)$, $(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)(a - a_2)$, $(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)(a - a_3)$. Er blijft nu slechts over, om de a te bepalen. Daartoe heeft men

$$3(Ba + C) = p(a_3 - a)(a + a_1 + a_2) + q(a_3 - a_1)(a_2 + 2a) + r(a_3 - a_2)(a_1 + 2a),$$

$$Ka-K_1=p(a_3-a)(a_1b_2b+a_2b_1b+ab_1b_2)+q\{(a_3-a_1)abb_2+(ab_3-ab_1-a_1b_3+a_3b_1)(ab_2+a_2b)\}+$$
$$+r\{(a_3-a_1)abb_1+(ab_3-ab_2-a_2b_3+a_3b_2)(ab_1+a_1b)\},$$
$$La-L_1=p\,b_1\,b_2\,b\,(a_3-a)+q\,b\,b_2(a\,b_3-a\,b_1-a_1\,b_3+a_3\,b_1)+r\,b\,b_1(a\,b_3-a\,b_2-a_2b_3+a_3b_2);$$

waardoor vervolgens

$$(Ea-E_1)-3\,B.\,2\,b=p\,(a_3-a)\,(b_1+b_2-b)+q\{(a_3-a_1)\,(b_2-b)+a\,b_3-a\,b_1-a_1b_3+a_3b_1\}+$$
$$+\,r\{(a_3-a_2)\,(b_1-b)+a\,b_3-a\,b_2-a_2\,b_3+a_3\,b_2\},$$
$$2\,(F\,a-F_1)-3\,(B\,a+C)\,b=p\,(a_3-a)\,(a\,b_1+a\,b_2+a_1\,b_2+a_2b_1-a\,b)+$$
$$+\,q\{(a_3-a_1)\,(2\,a\,b_2-a\,b)+(a+a_2)\,(a\,b_3-a\,b_1-a_1\,b_3+a_3\,b_1)\}+$$
$$+\,r\{(a_3-a_2)\,(2\,a\,b_1-a\,b)+(a+a_1)\,(a\,b_3-a\,b_2-a_2\,b_3+a_3\,b_2)\}\,;$$

derhalve

$$-\{(E\,a-E_1)-6\,B\,b\}\,a+\{2\,(F\,a-F_1)-(B\,a+C)\,3\,b\}=p\,(a_3-a)\,(a_1\,b_2+a_2\,b_1)+$$
$$+\,q\{(a_3-a_1)\,a\,b_2+a_2\,(a\,b_3-a\,b_1-a_1\,b_3+a_3b_1)\}+$$
$$+\,r\{(a_3-a_2)\,a\,b_1+a_1\,(a\,b_3-a\,b_2-a_2b_3+a_3\,b_2)\};$$

en eindelijk

$$(K\,a-K_1)+[\{(E\,a-E_1)-6\,Bb\}\,a-\{2\,(F\,a-F_1)-(B\,a+C)\,3\,b\}]\,b=p\,(a_3-a)\,a\,b_1\,b_2+$$
$$+\,q\,a\,b_2\,(a\,b_3-a\,b_1-a_1b_3+a_3\,b_1)+r\,a\,b_1(a\,b_3-a\,b_2-a_2\,b_3+a_3\,b_2)=(L\,a-L_1)\,\frac{a}{b},$$

of rangschikkende naar b

$$3(B\,a+C)\,b^3-2\{(F\,a-F_1)+3\,B\,a\}\,b^2+\{(E\,a-E_1)a+(K\,a-K_1)\}\,b-(L\,a-L_1)\,a=0,$$

dat is volgens (10^a)

$$3\,(B\,a+C)\{E\,a^3-(E_1+2\,F)\,a^2+(2\,F_1+G)\,a-G_1\}^3-$$
$$-2\{(F\,a-F_1)+3\,B\,a\}\,(3\,B\,a^2-3\,C\,a+D)\,\{E\,a^3-(E_1+2\,F)\,a^2+(2\,F_1+G)a-G_1\}^2+$$
$$+\{(E\,a-E_1)\,a-(K\,a-K_1)\}(3B\,a^2-3C\,a+D)^2\,\{(E\,a^3-(E_1+2\,F)\,a^2+(2\,F_1+G)\,a-G_1\}+$$
$$+\,(L\,a-L_1)\,a\,(3\,B\,a^2-3\,C\,a+D)^3=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10^b)$$

eene tiendemachtsvergelijking voor a.

Er blijven hier, behalve de oorspronkelijke waarden

$$A=0, \quad A_1=-3\,B, \quad B_1=-C, \quad 3\,C_1=-D, \quad D_1=0, \quad \ldots\ldots \quad (a_5)$$

nog de twee voorwaardensvergelijkingen

$$H=, \qquad H_1=, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b_5)$$

die nog niet gebruikt zijn. Er moet echter nog eene worden opgespoord, die men op de volgende wijze vindt.

$$H - Eb = p(b_3 - b)(b_1 + b_2 - b) + q(b_3 - b_1)b_2 + r(b_3 - b_2)b_1,$$
$$L - (H - Eb)b = p(b_3 - b)(b_1 b_2 - b_1 b - b_2 b - b^2) = p(b_3 - b)(b_2 - b)(b_1 - b).$$

Derhalve

$$(3Ba^2 - 3Ca + D)(b_3 - b)(b_2 - b)(b_1 - b) = (Eb^2 - Hb + L)(a_3 - a)(a_2 - a)(a_1 - a), \quad . \; (c_5)$$

waarin nu de gevonden waarden van de a en b te substitueeren zijn.

12. Evenmin geldt de oplossing van § 10, als $a = a_1$ is. Volgens de vergelijkingen (10) en (10^a) is dan ook $b = b_1$, $q = p$, zoodat men heeft

$$A = 2q + r + s,$$
$$3B = 2q(a_1 + a_2 + a_3) + r(2a_1 + a_3) + s(2a_1 + a_2),$$
$$3C = 2q(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + r(a_1^2 + 2a_3 a_1) + s(a_1^2 + 2a_2 a_1),$$
$$D = 2q a_1 a_2 a_3 + r a_1^2 a_3 + s a_1^2 a_2,$$
$$E = 2q(b_1 + b_2 + b_3) + r(2b_1 + b_3) + s(2b_1 + b_2),$$
$$2F = 2q(a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2) + 2r(a_3 b_1 + a_1 b_3 + a_1 b_1) + 2s(a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1),$$
$$G = 2q(a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) + r(2a_1 a_3 b_1 + a_1^2 b_3) + s(2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2),$$
$$H = 2q(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + r(2b_1 b_2 + b_1^2) + s(2b_1 b_2 + b_1^2),$$
$$K = 2q(a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2) + r(2a_1 b_1 b_3 + a_3 b_1^2) + s(2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2),$$
$$L = 2q b_1 b_2 b_3 + r b_1^2 b_3 + s b_1^2 b_2,$$
$$A_1 = 2q a_1 + r a_2 + s a_3,$$
$$3B_1 = 2q a_1(a_1 + a_2 + a_3) + r a_2(2a_1 + a_3) + s a_3(2a_1 + a_2),$$
$$3C_1 = 2q a_1(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + r a_2(2a_1 a_3 + a_1^2) + 2s a_3(2a_1 a_2 + a_1^2),$$
$$D_1 = 2q a_1^2 a_2 a_3 + r a_1^2 a_2 a_3 + s a_1^2 a_2 a_3,$$
$$E_1 = 2q a_1(b_1 + b_2 + b_3) + r a_2(2b_1 + b_3) + s a_3(2b_1 + b_2),$$
$$2F_1 = 2q a_1(a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2) + 2r a_2(a_3 b_1 + a_1 b_3 + a_1 b_1) +$$
$$+ 2s a_3(a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_1),$$
$$G_1 = 2q a_1(a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) + r a_2(2a_1 a_3 b_1 + a_1^2 b_3) + s a_3(2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2),$$
$$H_1 = 2q a_1(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + r a_2(2b_1 b_3 + b_1^2) + s a_3(2b_1 b_2 + b_1^2),$$
$$K_1 = 2q a_1(a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2) + r a_2(2a_1 b_1 b_3 + a_3 b_1^2) + s a_3(2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2),$$
$$L_1 = 2q a_1 b_1 b_2 b_3 + r a_2 b_1^2 b_3 + s a_3 b_1^2 b_2.$$

Men leidt nu achtereenvolgens af

$$\frac{3B+A_1}{A} = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad \frac{3(C+B_1)}{A} = a_1^2 + 2a_1 a + 2a_1 a_3 + a_2 a_3,$$
$$\frac{D+3C_1}{A} = a_1^2 a_2 + a_1^2 a_3 + 2a_1 a_2 a_3, \quad \frac{D_1}{A} = a_1^2 a_2 a_3;$$

dus

$$\frac{3B+A_1}{A} - 2a_1 = a_2 + a_3, \quad \frac{3(C+B_1)}{A} - a_1^2 = 2a(a_2+a_3) + a_2 a_3,$$
$$\frac{D+3C_1}{A} = a_1^2(a_2+a_3) + 2a_1(a_2 a_3), \quad \frac{D_1}{A a_1^2} = a_2 a_3.$$

Substitueert men de $a_2 + a_3$ en $a_2 a_3$ uit de beide uiterste in de beide middelste vergelijkingen, zoo is

$$\left.\begin{array}{l} 3Aa_1^4 - 2(3B+A_1)a_1^3 + 3(C+B_1)a_1^2 - D_1 = 0, \\ 2Aa_1^4 - (3B+A_1)a_1^3 + (D+3C_1)a_1 - 2D_1 = 0; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

twee vergelijkingen, die beide kunnen dienen ter bepaling van a_1. Men kan ze echter door eliminatie telkens herleiden, en verkrijgt dan

$$\left.\begin{array}{l} (3B+A_1)a_1^3 - 6(C+B_1)a_1^2 + 3(D+3C_1)a_1 - 4D_1 = 0, \\ 4Aa_1^3 - 3(3B+A_1)a_1^2 + 6(C+B_1)a_1 - (D+3C_1) = 0, \\ \{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}3a_1^2 + \{(3B+A_1)(C+B_1) - (D+3C_1)2A\}6a_1 + \\ \quad + 16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1) = 0, \\ \{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}a_1^2 + \{(C+B_1)(D+3C_1) - (3B+A_1)2D_1\}6a_1 + \\ \quad 24(C+B_1)D_1 - 3(D+3C_1)^2 = 0; \end{array}\right\} (11^a)$$

$$\left.\begin{array}{l} [\{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}\{(3B+A_1)(C+B_1) - (D+3C_1)2A\} - \\ \quad -3\{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}\{(C+B_1)(D+3C_1) - (3B+A_1)2D_1\}]6a_1 = \\ \quad = [27\{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}\{8(C+B_1)D_1 - (D+3C_1)^2\} - \\ \quad - \{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}\{16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1)\}], \\ [27\{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}\{8(C+B_1)D_1 - (D+3C_1)^2\} - \\ \quad - \{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}\{16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1)\}]a_1 = \\ \quad = [6\{(C+B_1)(D+3C_1) - (3B-A_1)2D\}\{16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1)\} - \\ \quad - 18\{(3B+A_1)(C+B_1) - (D+3C_1)2A\}\{8(C+B_1)D_1 - (D+3C_1)^2\}]. \end{array}\right\} (11^b)$$

Beide laatste vergelijkingen geven nu de a_1, en daarenboven, na deeling, eene betrekking, die er noodzakelijk tusschen de coëfficiënten bestaan moet. Heeten die vergelijkingen $Pa_1 = Q$, $P_1 a_1 = Q_1$, zoo moet zijn

$$PQ_1 = P_1 Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a_6)$$

Voor de a_2 heeft men hier nog

$$A a_2^4 - (3B + A_1) a_2^3 + (C + B_1) 3 a_2^2 - (D + 3 C_1) a_2 + D_1 = 0, \quad . \; . \quad (11^c)$$

en dezelfde geldt voor a_3; terwijl ook de beide vergelijkingen (11) voor a_1 aan de (11^c) voldoen, zoo als behoorde, want deze geven daarvan de twee, thans dubbelen, wortel.

Verder is

$$6B - 3Aa_1 = 2q(-a_1 + 2a_2 + 2a_3) + r(a_1 + 2a_3) + s(a_1 + 2a_2),$$
$$3Aa_1^2 - 6Ba_1 + 3C = 2q(a_1^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_2 a_3);$$

dus

$$q = \frac{3}{2} \frac{Aa_1^2 - 2Ba_1 + C}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}. \; . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11^d)$$

Nog is

$$3B - Aa_2 = 2q(a_1 + a_3) + r(2a_1 - a_2 + a_3) + 2sa_1,$$
$$Aa_2^2 - 3Ba_2 + 3C = 2qa_1a_3 + r(a_1^2 + 2a_3a_1 - 2a_2a_1 + a_2^3 - a_2a_3) + sa_1^2,$$
$$Aa_2^3 - 3Ba_2^2 + 3Ca_2 - D = r(a_1^2a_2 + 2a_1a_2a_3 - 2a_1a_2^2 + a_2^3 - a_2^2a_3 - a_1^2a_3) =$$
$$= r(a_2 - a_3)(a_1 - a_2)^2,$$

waaruit

$$r = \frac{Aa_2^3 - 3Ba_2^2 + 3Ca_2 - D}{(a_2 - a_3)(a_1 - a_2)^2}; \text{ terwijl evenzoo } s = \frac{Aa_3^3 - 3Ba_3^2 + 3Ca_3 - D}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_3)^2}. \; . \; (11^e)$$

Nu moet nog de b_1 gezocht worden; daartoe heeft men

$$Aa_1 - A_1 = r(a_1 - a_2) + s(a_1 - a_3),$$
$$3Ba_1 - 3B_1 = r(a_1 - a_2)(2a_2 + a_3) + s(a_1 - a_3)(2a_1 + a_2),$$
$$3Ca_1 - 3C_1 = r(a_1 - a_2)(a_1^2 + 2a_3a_1) + s(a_1 - a_3)(a_1^2 + 2a_2a_1),$$
$$Ea_1 - E_1 = r(a_1 - a_2)(2b_1 + b_3) + s(a_1 - a_3)(2b_1 + b_2),$$
$$Fa_1 - F_1 = r(a_1 - a_2)(a_3b_1 + a_1b_3 + a_1b_1) + s(a_1 - a_3)(a_2b_1 + a_1b_2 + a_1b_1),$$
$$Ga_1 - G_1 = r(a_1 - a_2)(2a_1a_3b_1 + a_1^2b_3) + s(a_1 - a_3)(2a_1a_2b_1 + a_1^2b_2);$$

waaruit nu wordt afgeleid

$$(Ea_1 - E_1)a_1 - (Fa_1 - F_1) = r(a_1 - a_2)(a_1b_1 - a_3b_1) + s(a_1 - a_3)(a_1b_1 - a_2b_1) = r(a_1 - a_2)b_1(a_1 - a_3) +$$
$$+ s(a_1 - a_3)b_1(a_1 - a_2),$$
$$(Aa_1 - A_1)3a_1 - 3(Ba_1 - B_1) = (r + s)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3),$$

en dus, na deeling,

$$b_1 = \frac{1}{3} \frac{Ea_1^2 - (E_1 + F)a_1 + F_1}{Aa_1^2 - (A_1 + B)a_1 + B_1}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11^f)$$

Evenzeer nog

$$(Fa_1 - F_1)\,a_1 - (Ga_1 - G_1) = r\,(a_1 - a_2)\,(a_1^2 b_1 - a_1 a_3 b_1) + s\,(a_1 - a_3)\,(a_1^2 b_1 - a_1 a_2 b_1),$$
$$3\,(Ba_1 - B_1)\,a_1 - (Ca_1 - C_1) = r\,(a_1 - a_2)\,(a_1^2 - a_1 a_3) + s\,(a_1 - a_3)\,(a_1^2 - a_1 a_2),$$

en dus, als men deze op elkander deelt,

$$b_1 = \frac{1}{3}\,\frac{Fa_1^2 - (F_1 + G)\,a_1 + G_1}{Ba_1^2 - (B_1 + C)\,a_1 + C_1} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (11^g)$$

Beide waarden voor b_1 leveren nog als voorwaardensvergelijking

$$\left.\begin{aligned} &BEa_1^4 - (BE_1 + BF + B_1E + CE)\,a_1^3 + \\ &\quad + (BF_1 + B_1E_1 + B_1F + CE_1 + CF + C_1E)\,a_1^2 - (C_1E_1 + C_1F + B_1F_1 + CF_1)\,a_1 + CF_1 = \\ &\quad = AFa_1^4 - (AF_1 + AG + A_1F + BF)\,a_1^3 + \\ &\quad + (AG_1 + A_1F_1 + A_1G + BF_1 + BG + BF)\,a_1^2 - (A_1G_1 + BG_1 + B_1F + B_1G)\,a_1 + B_1G_1, \end{aligned}\right\} .\,(b_6)$$

waaruit nu door eene der vergelijkingen (11) tot (11^b) de a_1 moet worden geëlimineerd.

Voor b_2 heeft men weder

$$b_2 = \frac{1}{3}\,\frac{Ea_2^2 - (E_1 + 2F)\,a_2^2 + (2F_1 + G)\,a_2 - G_1}{Aa_2^2 - (A_1 + 2B)\,a_2^2 + (2B_1 + C)\,a_2 - C_1}, \; \ldots\ldots \; (11^h)$$

waaruit de b_3 wordt afgeleid door a_2 te vervangen door a_3. Deze a_2 en a_3 moeten dan later worden geëlimineerd.

Verder heeft men nog als voorwaardensvergelijkingen

$$H =, \quad K =, \quad L =, \qquad H_1 =, \quad K_1 =, \quad L_1 = \; \ldots\ldots\ldots \; (c_6)$$

13. Eindelijk kan nog $a = a_1$ (dus ook $b = b_1$ en $p = q$) en tegelijk $a_3 = a_2$ (dus ook $b_3 = b_2$ en $s = r$) zijn; in dat geval heeft men

$$\begin{aligned}
A &= 2\,(q + r), & A_1 &= 2\,q\,a_1 + 2\,r\,a_2,\\
3B &= 2\,q\,(a_1 + 2\,a_2) + 2\,r\,(2\,a_1 + a_2), & 3B_1 &= 2\,q\,a_1\,(a_1 + 2\,a_2) + 2\,r\,a_2\,(2\,a_1 + a_2),\\
3C &= 2\,q\,(a_2^2 + 2\,a_1 a_2) + 2\,r\,(a_1^2 + 2\,a_1 a_2), & 3C_1 &= 2\,q\,a_1\,(a_2^2 + 2\,a_1 a_2) + 2\,r\,a_2\,(a_1^2 + 2\,a_1 a_2),\\
D &= 2\,q\,a_1 a_2^2 + 2\,r\,a_1^2 a_2, & D_1 &= 2\,q\,a_1^2 a_2^2 + 2\,r\,a_1^2 a_2^2,\\
E &= 2\,q\,(b_1 + 2\,b_2) + 2\,r\,(2\,b_1 + b_2), & E_1 &= 2\,q\,a_1\,(b_1 + 2\,b_2) + 2\,r\,a_2\,(2\,b_1 + b_2),\\
2F &= 4q(a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2) + 4r(a_2b_1 + a_1b_2 + a_1b_1), & 2F_1 &= 4qa_1(a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2) + 4ra_2(a_2b_1 + a_1b_2 + a_1b_1),\\
G &= 2q(2a_1a_2b_2 + a_2^2b_1) + 2r(2a_1a_2b_1 + a_1^2b_2), & G_1 &= 2qa_1(2a_1a_2b_2 + a_2^2b_1) + 2ra_2(2a_1a_2b_1 + a_1^2b_2),\\
H &= 2\,q\,(2\,b_1 b_2 + b_2^2) + 2\,r\,(2\,b_1 b_2 + b_1^2), & H_1 &= 2\,q\,a_1\,(2\,b_1 b_2 + b_2^2) + 2\,r\,a_2\,(2\,b_1 b_2 + b_1^2),\\
K &= 2q(a_1b_2^2 + 2a_2b_1b_2) + 2r(2a_1b_1b_2 + a_2b_1^2), & K_1 &= 2qa_1(a_1b_2^2 + 2a_2b_1b_2) + 2ra_2(2a_1b_1b_2 + a_2b_1^2),\\
L &= 2\,q\,b_1 b_2^2 + 2\,r\,b_1^2 b_2, & L_1 &= 2\,q\,a_1\,b_1\,b_2^2 + r\,a_2\,b_1^2\,b_2.
\end{aligned}$$

Alsnu is

$3B + A_1 = (a_1 + a_2)\,4(q + r), \qquad 3(C + B_1) = 2(q + r)(a_1^2 + 4a_1a_2 + a_2^2),$

dus

$$a_1 + a_2 = \frac{3B + A_1}{2A}, \qquad a_1a_2 = \frac{3(C + B_1)}{2A} - \frac{(3B + A_1)^2}{8A^2}; \quad \ldots\ldots (a)$$

derhalve zijn a_1 en a_2 de wortels van de vergelijking

$$8A^2\alpha^2 - 4A(3B + A_1)\alpha + \{12A(C + B_1) - (3B + A_1)^2\} = 0. \quad \ldots\ldots (12)$$

Verder is

$$\frac{L}{b_1b_2} = 2qb_2 + 2rb_1, \; E - \frac{L}{b_1b_2} = (b_1+b_2)2(q+r) = (b_1+b_2)A, \; H - \frac{L}{b_1b_2}(b_1+b_2) = 2b_1b_2(q+r) = b_1b_2A;$$

zoodat (b_1b_2) en $(b_1 + b_2)$ de wortels worden van de vergelijkingen

$$(H - b_1b_2A)\frac{b_1b_2}{L} = \frac{1}{A}\left(E - \frac{L}{b_1b_2}\right) \text{ en } \{(b_1+b_2)^2A - E(b_1+b_2) + H\}\{E - A(b_1+b_2)\} = AL,$$

of $A^2(b_1b_2)^3 - HA(b_1b_2)^2 + LE(b_1b_2) - L = 0$ en
$A^2(b_1 + b_2)^3 - 2AE(b_1 + b_2)^2 + (AH - E^2)(b_1 + b_2) - (HE - AL) = 0$ $\Big\}$ . . . . (12^a)

Nog moeten q en r worden bepaald.

$$q = \frac{Aa_2 - A_1}{2(a_2 - a_1)}, \qquad r = \frac{A_1 - Aa_1}{2(a_2 - a_1)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12^b)$$

Hier komen voor als voorwaardensvergelijkingen, behalve de niet gebruikte,

$D =, 2F =, G =, K =, 3C_1 =, D_1 =, E_1 =, 2F_1 =, G_1 =, H_1 =, K_1 =, L_1 =, \;. \; (a_7)$

nog twee andere, die men aldus vindt,

$3B - 3A_1 = 4(q - r)(a_2 - a_1), \; 3(C - B_1) = 2(q - r)(a_2^2 - a_1^2), \; 3D - 3C_1 = 4(q - r)(a_1 - a_2)a_1a_2;$

waaruit

$$\frac{C - B_1}{B - A_1} = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = \frac{3B + A_1}{4A}, \quad \frac{C_1 - D}{B - A_1} = a_1a_2 = \frac{3(C + B_1)}{A} - \frac{(3B + A_1)^2}{8A^2}, \; . \; . \; (b_7)$$

naar de vorige vergelijkingen (a).

14. Op dergelijke wijze kan men ook differentiaalvergelijkingen der tweede orde opsporen, die eene gegeven integraalvergelijking zouden hebben.

Stel deze bijv. als in § 2

$$(x + a y + b)^p (x + a_1 y + b_1)^q = P; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(A)}$$

dan is achtereenvolgens

$$p(x + a_1 y + b_1)(1 + a y') + q(x + a y + b)(1 + a_1 y') = 0,$$
$$(p+q)(1 + a_1 y')(1 + a y') + p(x + a_1 y + b_1) a y'' + q(x + a y + b) a_1 y'' = 0,$$

of

$$(p + q)\{1 + (a + a_1) y' + a a_1 y'^2\} + \{p a b_1 + q a_1 b + (p a + q a_1) x + (p + q) a a_1 y\} y'' = 0.$$

Deze moet nu den vorm hebben

$$A + B y' + C y'^2 + (D + E x + F y) y'' = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(X)}$$

en daartoe moet zijn

$$A = p + q, \qquad D = p a b_1 + q a_1 b,$$
$$B = (p + q)(a + a_1), \qquad E = p a + q a_1,$$
$$C = (p + q) a a_1, \qquad F = (p + q) a a_1.$$

Hieruit leidt men af

$$a + a_1 = \frac{B}{A}, \quad a a_1 = \frac{C}{A} \text{ dus } a \text{ en } a_1 \text{ de wortels van } A\alpha^2 - B\alpha + C = 0; \; . \; (13)$$

verder

$$p = \frac{E - A a_1}{a - a_1}, \qquad q = \frac{A a - E}{a - a_1}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13^a)$$

Nu blijft er alleen D over ter bepaling van de b en b_1: het vraagstuk is dus onbepaald. Men vindt echter korter

$$D = \frac{E - A a_1}{a - a_1} a b_1 + \frac{A a - E}{a - a_1} b a_1 = \frac{E a - C}{a - a_1} b_1 + \frac{C - E a_1}{a - a_1} b. \quad \ldots \ldots (13^b)$$

15. Deze oplossing gaat niet door, als $a = a_1$. Men heeft dan

$$A = p + q, \qquad D = a(p b_1 + q b),$$
$$B = (p + q)\, 2 a, \qquad E = (p + q) a,$$
$$C = (p + q) a^2, \qquad F = (p + q) a^2.$$

Dus

$$a = \frac{E}{A} = \frac{B}{2A} = \frac{2C}{B}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

waaruit

$$2E = B, \qquad A = \frac{B^2}{4C} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad ([illegible])$$

als voorwaarden.

Maar D moet nu alleen p, q, a_1 en b_1 leveren, zoodat de onbepaaldheid van het vraagstuk in het oog springt. Maar nu wordt ook (X)

$$\frac{B^2}{4C} + By' + Cy'^2 + (D + \frac{1}{2}Bx + Cy)\,y'' = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XI)}$$

eene volkomen differentiaal van de eerste integraalvergelijking

$$Cyy' + (D + \frac{1}{2}Bx)\,y' + \frac{1}{2}By + \frac{B^2x}{4C} = P. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XII)}$$

16. Neem verder als integraalvergelijking

$$(x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e)^p\,(x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1)^q = P \;\cdot\; \text{(B)}$$

van § 6; en differentieer deze tweemaal,

$$p\,(x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1)\{(x + ay + c) + (ax + by + d)y'\} +$$
$$+ q\{x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e\}\{(x + a_1y + c_1) + (a_1x + b_1y + d_1)y'\} = 0,$$
$$2(p + q)\{x + a_1y + c_1) + (a_1x + b_1y + d_1)y'\}\,\{(x + ay + c) + (ax + by + d)y'\} +$$
$$+ p(x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1)\{1 + ay' + (a + by')y' + (ax + by + d)y''\} +$$
$$+ q(x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e)\{1 + a_1y' + (a_1 + b_1y')y' + (a_1x + b_1y + d_1)y''\},$$

of

$$\Big[(p + q)x^2 + \{(pa_1 + qa) + (p + q)(a + a_1)\}2xy + \{(pb_1 + qb) + (p + q)2aa_1\}y^2 +$$
$$+ \{(pc_1 + qc) + (p + q)(c + c_1)\}2x + \{(pd_1 + qd) + (p + q)(ac_1 + a_1c)\}2y +$$
$$+ \{(pe_1 + qe) + (p + q)2cc_1\}\Big] + y'\Big[\{(pa_1 + qa) + (p + q)(a + a_1)\}2x^2 +$$
$$+ \{(p + q)2aa_1 + (p + q)(2aa_1 + b + b_1)\}2xy + \{(pab_1 + qa_1b) + (p + q)(ab_1 + a_1b)\}2y^2 +$$
$$+ \{2(pac_1 + qa_1c) + (p + q)(ac_1 + a_1c + d + d_1)\}2x +$$
$$+ \{2(pad_1 + qa_1d) + (p + q)(ad_1 + a_1d + bc_1 + b_1c)\}2y + \{(pe_1 + qe) + 2(p + q)(cd_1 + c_1d)\}\Big] +$$
$$+ y'^2\Big[\{(pb + qb_1) + (p + q)2aa_1\}x^2 + \{(pab_1 + qa_1b) + (p + q)(ab_1 + a_1b)\}2xy + 3(p + q)bb_1y^2 +$$
$$+ \{(pbc_1 + qb_1c) + (p + q)(ad_1 + a_1d)\}2x + \{(pbd_1 + qb_1d) + (p + q)(bd_1 + b_1d)\}2y +$$
$$+ \{(pbe_1 + qb_1e) + (p + q)2dd_1\}\Big] + y''\Big[(p + q)x^3 + \{(pa + qa_1) + (p + q)2aa_1\}x^2y +$$
$$+ \{p(ab_1 + 2a_1b) + q(a_1b + 2ab_1)\}xy^2 + (p + q)bb_1y^3 +$$
$$+ \{p(2ac_1 + d) + q(2a_1c + d_1)\}x^2 + \{p(ad_1 + bc_1 + a_1d) + q(a_1d + b_1c + ad_1)\}2xy +$$
$$+ \{p(2bd_1 + b_1d) + q(2b_1d + bd_1)\}y^2 + \{p(ae_1 + 2c_1d) + q(a_1e + 2cd_1)\}x +$$
$$+ \{p(be_1 + 2dd_1) + q(b_1e + 2dd_1)\}y + (pdc_1 + qd_1e)\Big] = 0.$$

Onze differentiaalvergelijking moet dus den vorm hebben

$$\left.\begin{array}{l}(3E_3x^2+2F_3xy+G_3y^2+2H_3x+2K_3y+L_3)+2y'(E_2x^2+F_2xy+Gy^2+H_2x+K_2y+L_2)+\\ \quad +y'^2(E_1x^2+2F_1xy+3G_1y^2+2H_1x+2K_1y+L_1)+\\ \quad +y''(Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+2Fxy+Gy^2+Hx+Ky+L)=0;\end{array}\right\}.\text{(XIII)}$$

zoodat men heeft

$A=pa+qa_1,$
$B=pb+qb_1+(p+q)2aa_1,$
$C=pa_1b+qab_1+(p+q)(ab_1+a_1b),$
$D=(p+q)bb_1,$
$E=2(pac_1+qa_1c)+pd+qd_1,$
$F=pbc_1+qb_1c+(p+q)(ad_1+a_1d),$
$G=pbd_1+qb_1d+(p+q)(bd_1+b_1d),$
$H=pae_1+qa_1e+2(pc_1d+qcd_1),$
$K=pbe_1+qb_1e+(p+q)2dd_1,$
$L=pde_1+qd_1e,$

$E_1=pb+qb_1+(p+q)2aa_1, \qquad =B,$
$F_1=pa_1b+qab_1+(p+q)(ab_1+a_1b)=C,$
$G_1=(p+q)bb_1 \qquad =D,$
$H_1=(pbc_1+qb_1c)+(p+q)(ad_1+a_1d)=F,$
$K_1=(pbd_1+qb_1d)+(p+q)(bd_1+b_1d)=G,$
$L_1=pbe_1+qb_1e+2(p+q)dd_1 \qquad =K,$

$E_2=(pa+qa_1)+(p+q)(a+a_1) \qquad =\frac{1}{2}(3A+F_3),$
$F_2=(p+q)(b+b_1+4aa_1) \qquad =B+G_3,$
$G_2=(pab_1+qa_1b)+(p+q)(ab_1+a_1b),$
$H_2=2(pac_1+qa_1c)+(p+q)(ac_1+a_1c+d+d_1)=E+K_3,$
$K_2=2(pad_1+qa_1d)+(p+q)(ad_1+a_1d+bc_1+b_1c),$
$L_2=(pae_1+qa_1e)+(p+q)(cd_1+c_1d),$

$E_3=p+q,$
$F_3=pa_1+qa+(p+q)(a+a_1),$
$G_3=pb_1+qb+(p+q)2aa_1,$
$H_3=(pc_1+qc)+(p+q)(c+c_1),$
$K_3=(pd_1+qd)+(p+q)(ac_1+a_1c),$
$L_3=(pe_1+qe)+(p+q)2cc_1.$

Vooreerst heeft men in dit geval de voorwaardensvergelijkingen

$$E_1=B,\ F_1=C,\ G_1=D,\ H_1=F,\ K_1=G,\ L_1=K,\ E_2=\frac{1}{2}(3A+F_3),\ F_2=B+G_3,\ H_2=E+K_3 \,..\, (a_9)$$

Uit het voorgaande leidt men verder af

$$3A-F_3=2(p-q)(a-a_1),\ \ B-G_3=(p-q)(b-b_1),\ \ G_2-C=(p-q)(ab_1-a_1b).$$

Maar

$$b(a-a_1)-a(b-b_1)=ab_1-a_1b,\quad b_1(a-a_1)-a_1(b-b_1)=ab_1-a_1b,\ \ .\ .\ (\alpha)$$

dus

$$(3A-F_3)b-2(B-G_3)a=2(G_2-C),\quad (3A-F_3)b_1-2(B-G_3)a_1=2(G-C);$$

waarvan de som geeft

$$(3A-F_3)(b+b_1)-4(G_2-C)=2(B-G_3)(a+a_1)=(B-G_3)\frac{A+F_3}{E_3};$$

dus

$$b+b_1=\frac{4E_3(G_2-C)+(B-G_3)(A+F_3)}{E_3(3A-F_3)}, \text{ terwijl } bb_1=\frac{D}{E_3} \text{ is};$$

zoodat b en b_1 de wortels zijn der vergelijking

$$(3A-F_3)E_3^2\beta^2-\{4E_3(G_2-C)+(B-G_3)(A+F_3)\}E_3\beta+D=0 \quad . \quad (15)$$

Wij gebruikten reeds

$$\frac{A+F_3}{2E_3}=(a+a_1);$$

bovendien is

$$\frac{B+G_3}{E_3}=b+b_1+4aa_1,$$

waaruit volgt, naar de bovengevonden waarde van $b+b_1$,

$$aa_1=\frac{1}{4}\left(\frac{B+G_3}{E_3}-(b+b_1)\right)=\frac{2AG_3+B(A-F_3)-2E_3(G_2-C)}{2E_3(3A-F_3)};$$

zoodat a en a_1 de wortels zijn van

$$2E_3(3A-F_3)\alpha^2-(A+F_3)(3A-F_3)\alpha+\{2AG_3+B(A-F_3)-2E_3(G_2-C)\}=0 \quad . . (15^a)$$

Uit de waarden voor A en E_3 leidt men dan af

$$p=\frac{A-E_3a_1}{a-a_1}, \qquad q=\frac{E_3a-A}{a-a_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15^b)$$

Tusschen de coëfficiënten A, B, C, D, G_2, E_3, F_3 en G_3, die ons gediend hebben voor de betrekkingen (15), (15^a), (15^b), moeten nu nog twee voorwaardensvergelijkingen bestaan. Vooreerst vindt men, door substitutie van $(a+a_1)$, aa_1 en bb_1,

$$\left\{\frac{A-F_3}{2(B-G_3)}\right\}^2=\frac{(a+a_1)^2-4aa_1}{(b+b_1)^2-4bb_1}=(3A-F_3)\frac{\frac{1}{4}(A+F_3)(3A-F_3)-8(A-F_3)+2E_3(G_2-C)+2AG_3}{\{4E_3(G_2-C)+(B-G_3)(A+F_3)\}^2-4DE_3(3A-F_3)^2} \quad . \quad (16)$$

Nog geven de identische vergelijkingen (α), na vermenigvuldiging met $(p-q)$,

$$a(B-G_3)+(G_2-C)=b(3A-F_3) \text{ en } a_1(B-G_3)+(G_2-C)=b_1(3A-F_3);$$

vermenigvuldigt men ze, en voert men de waarden van $a a_1$, $a + a_1$ en $b b_1$ in, zoo komt er, na vermenigvuldiging met $2 E_3 (3 A - F_3)$,

$$\{B(A - F_3) - 2 E_3 (G_2 - C) + 2 A G_3\} (B - G_3)^2 + (3 A - F_3)(A + F_3)(B - G_3)(G_2 - C) + \\ + (3 A - F_3)(G_2 - C)^2 = 2 D (3 A - F_3)^3 \quad \ldots \ldots \quad (b_{10})$$

Om nu de volgende coëfficiënten te bepalen, vindt men

$$p d + q d_1 = E - 2 (p a c_1 + q a_1 c), \qquad q d + p d_1 = K_3 - (p + q)(a c_1 + a_1 c);$$

waaruit

$$\left.\begin{array}{l}(p^2 - q^2) d = p E - K_3 q + a c_1 (q^2 + p q - 2 p^2) + a_1 c (q^2 - p q), \\ (p^2 - q^2) d_1 = p K_3 - E q + a c_1 (p q - p^2) + a_1 c (2 q^2 - p q - p^2).\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (b_{11})$$

Men heeft hiermede

$$(p - q)\left[F - (p b c_1 + q b_1 c)\right] = (p^2 - q^2)(a d_1 + a_1 d) = (K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1 + \\ a c_1 (p - q) \{- p a + (2 p + q) a_1\} + a_1 c (p - q) \{(p + 2 q) a - q a_1\},$$

en

$$F - \frac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q} = c_1 \{p b - p a^2 - (2 p + q) a a_1\} + c \{q b_1 - q a_1{}^2 - (p + 2 q) a a_1\}.$$

Maar ook is

$$H_3 = c_1 (2 p + q) \qquad\qquad + c (p + 2 q),$$

derhalve

$$F - \frac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q} + H_3 a a_1 = c_1 p (b - a^2) + c q (b_1 - a_1{}^2).$$

Uit beide laatste vergelijkingen kan men c en c_1 oplossen.

$$\left.\begin{array}{l}[(2p+q)q(b_1 - a_1{}^2) - (p+2q)p(b - a^2)]c = (2p+q)\left[F - \dfrac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q}\right] - (b - a^2) p H_3, \\ [(2p+q)q(b_1 - a_1{}^2) - (p+2q)p(b - a^2)]c_1 = (b_1 - a_1{}^2) q H_3 - (p+2q)\left[F - \dfrac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q}\right].\end{array}\right\} . (15^c)$$

En nu eenmaal c en c_1 gevonden zijn, heeft men uit (b), omdat $p + q = E_3$ is,

$$\left. d = \frac{1}{E_3}\left[\frac{E p - K_3 q}{p - q} - a c_1 (2 p + q) - a_1 c q\right], \quad d_1 = \frac{1}{E_3}\left[\frac{K_3 p - E q}{p - q} - a c_1 p - a_1 c (p + 2 q)\right]\right\} \ldots (15^d)$$

Behalve de coëfficiënten E, F, H_3, K_3, die ons gediend hebben, blijven er nog G en K_2 over als voorwaardensvergelijkingen,

$$G = (2p+q)bd_1 + (p+2q)b_1 d, \quad K_2 = (3p+q)ad_1 + (p+3q)a_1 d + E_3(bc_1+b_1c). \; . \; . \quad (d_9)$$

Ten slotte geven de coëfficiënten $L_3 - 2E_3cc_1 = pe_1 + qe$ en $L = dpe_1 + d_1qe$

$$e = \frac{1}{q}\frac{(L_3 - 2E_3cc_1)d - L}{d - d_1}, \qquad e_1 = \frac{1}{p}\frac{L - (L_3 - 2E_3cc_1)d_1}{d - d_1}. \; . \; . \; . \quad (15g)$$

Eindelijk houdt men nog als voorwaardensvergelijkingen over

$$H =, \qquad K =, \qquad L_2 =, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e_9)$$

die nog nergens gebruikt werden.

17. Deze oplossing geldt nu wederom niet in het geval, dat $F_3 = 3A$ is.

Maar dan is $3A - F_3 = 2(a - a_1)(p - q)$. Dus is of $a = a_1$, of $p = q$; omdat de eene gelijkheid de andere niet ten gevolge heeft.

Stel dus vooreerst $a_1 = a$; dan wordt

$$\begin{aligned}
A &= (p+q)a, & G_2 &= a(pb_1 + qb) + (p+q)a(b+b_1),\\
B &= pb + qb_1 + (p+q)2a^2, & K_2 &= 2a(pd_1+qd) + (p+q)\{a(d_1+d) + bc_1 + b_1c\},\\
C &= a(pb + qb_1) + (p+q)a(b+b_1), & L_2 &= a(pe_1 + qe) + (p+q)(cd_1 + c_1d),\\
D &= (p+q)bb_1, & E_3 &= p + q.\\
E &= 2a(pc_1 + qc) + pd + qd_1, & G_3 &= pb_1 + qb + (p+q)2a^2,\\
F &= pbc_1 + qb_1c + (p+q)a(d+d_1), & H_3 &= pc_1 + qc + (p+q)(c+c_1),\\
G &= pbd_1 + qb_1d + (p+q)(bd_1 + b_1d), & K_3 &= pd_1 + qd + (p+q)(c+c_1)a,\\
H &= a(pe_1 + qe) + 2(pc_1d + qcd_1), & L_3 &= pe_1 + qe + (p+q)2cc_1\\
K &= pbc_1 + qb_1c + (p+q)2dd_1, & &\\
L &= pde_1 + qd_1e, & &
\end{aligned}$$

Vooreerst is

$$a = \frac{A}{E_3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Daarna heeft men

$$\frac{C + G_2}{3a} = (p+q)(b+b_1), \text{ dus } b + b_1 = \frac{C + G_2}{3A}; \text{ en } bb_1 = \frac{D}{E_3};$$

derhalve zijn b en b_1 de wortels der vergelijking

$$3E\beta^2 - (C + G_2)E\beta + 3AD = 0 \qquad (16^a)$$

Omdat

$$\frac{C - G_2}{a} = (p - q)(b - b_1) \text{ is, wordt } p - q = \frac{C - G_2}{a(b - b_1)}; \text{ maar } p + q = \frac{A}{a} = E_3;$$

dus

$$p = \frac{E_3}{2A}\left(A + \frac{C - G_2}{b - b_1}\right), \qquad q = \frac{E_3}{2A}\left(A - \frac{C - G_2}{b - b_1}\right); \qquad (16^b)$$

waarbij de twee voorwaardensvergelijkingen

$$B + G_3 = (p + q)(4a^2 + b + b_1) = E_3\left(\frac{4A^2}{E_3{}^2} + \frac{C + G_2}{3A}\right), \qquad (a_{10})$$

$$B - G_3 = (p - q)(b - b_1) = \frac{C - G_2}{a}, \text{ dus } A(B - G_3) = E_3(C - G_2). \qquad (b_{10})$$

Verder is

$$2K_3 - 2H_3a + E = 2(pd_1 + qd) + pd + qd_1 = (2p + q)d_1 + (p + 2q)d,$$

en

$$G = (2p + q)bd_1 + (p + 2q)b_1d;$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{aligned} G - (2K_3 - 2H_3a + E)b &= (p + 2q)(b_1 - b)d = \left(\frac{A}{a} + q\right)(b_1 - b)d = \\ &= \frac{1}{2a}\left(3A - \frac{C - G_2}{b - b_1}\right)(b_1 - b)d = \frac{A}{2E_3}\{C - G_2 - 3A(b - b_1)\}d, \\ G - (2K_3 - 2H_3a + E)b_1 &= (2p + q)(b - b_1)d_1 = \left(\frac{A}{a} + p\right)(b - b_1)d_1 = \\ &= \frac{1}{2a}\left(3A + \frac{C - G_2}{b - b_1}\right)(b - b_1)d_1 = \frac{A}{2E_3}\{C - G_2 + 3A(b - b_1)\}d_1, \end{aligned}\right\} \qquad (16^c)$$

om de d en d_1 te bepalen. En nu kan men aldus voortgaan.

$$c + c_1 = \frac{1}{(p + q)a}\{K_3 - (pd_1 + qd)\}, \qquad pc_1 + qc = \frac{1}{2a}\{E - (pd + qd_1)\};$$

dus

$$\left.\begin{aligned}(p-q)\,c &= \frac{p}{E_3\,a}\{K_3-(p\,d_1+q\,d)\}-\frac{1}{2\,a}\{E-(p\,d+q\,d_1)\}=\\ &=\frac{1}{2\,A}\{2\,K_3\,p-E\,E_3+(p-q)\left[p\,d-(2\,p+q)\,d_1\right]\},\\ (p-q)\,c_1 &= \frac{1}{2\,a}\{E-(p\,d+q\,d_1)\}-\frac{q}{E_3\,a}\{K_3-(p\,d_1+q\,d)\}=\\ &=\frac{1}{2\,A}\{E\,E_3-2\,K_3\,q+(p-q)\left[q\,d_1-(p+2\,q)\,d\right]\},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (16^d)$$

waaruit c en c_1 volgt. Men behoudt hierbij de twee voorwaardensvergelijkingen

$$F=,\qquad K_2=.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (c_{10})$$

Eindelijk is

$$p\,e_1+q\,e=\frac{1}{a}\{L_1-(p+q)\,(c\,d_1+c_1\,d)\},\qquad p\,d\,e_1+q\,d_1\,e=L,$$

dus

$$\left.\begin{aligned}q\,e\,(d-d_1) &= \frac{d}{a}\{L_1-E_3\,(c\,d_1+c_1\,d)\}-L,\\ p\,e_1\,(d-d_1) &= L-\frac{d_1}{a}\{L_1-E_3\,(c\,d_1+c_1\,d)\};\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (16^e)$$

waarbij nog als voorwaarden overblijven de vergelijkingen

$$H=,\qquad K=,\qquad L_1=.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (d_{10})$$

18. Zij ten tweede $q=p$; dan heeft men

$A=p\,(a+a_1)$,
$B=p\,(b+b_1)+4\,p\,a\,a_1$,
$C=3\,p\,(a\,b_1+a_1\,b)$,
$D=2\,p\,b\,b_1$,
$E=2\,p\,(a\,c_1+a_1\,c)+p\,(d+d_1)$,
$F=p\,(b\,c_1+b_1\,c)+2\,p\,(a\,d_1+a_1\,d)$,
$G=3\,p\,(b\,d_1+b_1\,d)$,
$H=p\,(a\,e_1+a_1\,e)+2\,p\,(c_1\,d+c\,d_1)$,
$K=p\,(b\,e_1+b_1\,e)+4\,p\,d\,d_1$,
$L=p\,(d\,e_1+d_1\,e)$,
$G_2=2\,p\,(a\,b_1+a_1\,b)$,
$K_2=3\,p\,(a\,d_1+a_1\,d)+2\,p\,(b\,c_1+b_1\,c)$,
$L_2=p\,(a\,e_1+a_1\,e)+2\,p\,(c\,d_1+c_1\,d)$,
$E_3=2\,p$,
$G_3=p\,(b+b_1)+4\,p\,a\,a_1$,
$H_3=3\,p\,(c+c_1)$,
$K_3=p\,(d+d_1)+2\,p\,(a\,c_1+a_1\,c)$,
$L_3=p\,(e+e_1)+4\,p\,c\,c_1$.

Vooreerst hebben wij de voorwaardensvergelijkingen

$$G_2 = C, \quad L_2 = H, \quad G_3 = B, \quad K_3 = E; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a_{11})$$

en dan dadelijk

$$p = \frac{1}{2} E_3. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Vervolgens is

$$C - 3\,B\,a_1 = 3\,p\,b_1(a - a_1) - 12\,p\,a\,a_1^2, \quad C - 3\,B\,a_1 + 6\,E_3\,a\,a_1^2 = 3\,p\,b_1(a - a_1). \; . \quad (17^a)$$

Derhalve

$2(C - 3\,B\,a_1 + 6\,E_3\,a\,a_1^2) = 3\,E_3 b_1(a - a_1)$, dus ook $2(C - 3\,B\,a_1 + 6\,E_3\,a\,a_1^2)b = 3D(a - a_1)$.

Door hare substitutie in C geeft deze

$$4\,C(a - a_1)(C - 3\,B\,a_1 + 6\,E_3\,a\,a_1^2) = 4\,a(C - 3\,B\,a_1 + 6\,E_3\,a\,a_1^2)^2 + 9\,E_3\,D\,a_1(a - a_1)^2,$$

of, daar

$$2\,A = E_3(a + a_1), \quad a = \frac{2\,A}{E_3} - a_1, \quad \text{dus} \quad a - a_1 = 2\left(\frac{A}{E_3} - a_1\right),$$

door eliminatie van a

$$2\,C\left(\frac{A}{E_3} - a_1\right)(C - 3\,B\,a_1 + 12\,A\,a_1^2 - 6\,E_3\,a_1^3) =$$
$$= \left(\frac{2\,A}{E_3} - a_1\right)(C - 3\,B\,a_1 + 12\,A\,a_1^2 - 6\,E_3\,a_1^3)^2 + 9\,D\,E_3\,a_1\left(\frac{A}{E_3} - a_1\right)^2, \quad \ldots \quad (17^b)$$

eene zevende machtsvergelijking om a_1 te vinden, die echter in eene zesde machtsvergelijking overgaat, wegens het verdwijnen der termen $\frac{2\,A\,C^2}{E_3}$.

Daaruit volgt dan

$$a = \frac{2\,A}{E_3} - a_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17^c)$$

terwijl de b en b_1 nu door middel van (17^a) kunnen worden bepaald.

Vervolgens is

$$2\,F - K_2 = p(a\,d_1 + a_1\,d), \quad \text{dus} \quad a\,d_1 + a_1\,d = 2\,\frac{2\,F - K_2}{E_3} \quad \text{en} \quad b\,d_1 + b_1\,d = \frac{2\,G}{3\,E_3};$$

dus

$$(a_1 b - a b_1) d = \frac{2}{3F}\{3(2F - K_2)b - Ga\}, \quad (a_1 b - a b_1) d_1 = \frac{2}{3E}\{G a_1 - 3 b_1 (2F - K_2)\} \;.\;. \; (17^d)$$

Maar ook is

$$2K_2 - 3F = p(bc_1 + b_1 c) \text{ dus } bc_1 + b_1 c = 2\frac{2K_2 - 3F}{E_3} \text{ en } c + c_1 = \frac{2H_3}{3E_3};$$

dus

$$(b - b_1)c = \frac{2}{3E_3}\{bH_3 - 3(2K_2 - 3F)\}, \quad (b - b_1)c_1 = \frac{2}{3E_3}\{3(2K_2 - 3F) - b_1 H_3\}, . \; (17^e)$$

met de voorwaardensvergelijkingen

$$E = , \qquad K = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (b_{11})$$

Verder

$$2\frac{L_3 - 2E_3 c c_1}{E_3} = e + e_1 \text{ en } \frac{2L}{E_3} = d e_1 + d_1 e,$$

dus

$$(d - d_1)e = \frac{2}{E_3}\{(L_3 - 2E_3 c c_1)d - L\}, \quad (d - d_1)e_1 = \frac{2}{E_3}\{L - (L_3 - 2E_3 c c_1)d_1\} \;. \; (17^f)$$

met de voorwaardensvergelijking $H =$.

19. Het aangevoerde moge volstaan. Er bleek daaruit wederom, dat eene kleine verandering in de integraal-vergelijking eene grootere in de differentiaalvergelijking ten gevolge kan hebben, evenzeer als dit verschijnsel ook omgekeerd plaats heeft.

OVER HET VERBAND

TUSSCHEN DE

VOORTPLANTINGSSNELHEID VAN HET LICHT

EN DE

DICHTHEID EN SAMENSTELLING DER MIDDENSTOFFEN.

DOOR

H. A. LORENTZ.

De electromagnetische theorie van het licht, die in 1865 door MAXWELL * werd opgesteld, heeft sedert, vooral door de proeven van verschillende natuurkundigen over het specifiek induceerend vermogen der isolatoren, een hoogen graad van waarschijnlijkheid verkregen. Ofschoon ik het zeer goed mogelijk acht, dat bij verandering onzer begrippen omtrent de electrische verschijnselen ook de theorie van MAXWELL eenigszins moet worden gewijzigd, geloof ik toch, dat het hoofdbeginsel er van, de onderstelling namelijk, dat de lichttrillingen bewegingen zijn van denzelfden aard als de electrische stroomen, moeijelijk in twijfel kan worden getrokken. Het kwam mij daarom wenschelijk voor, de gevolgen dezer theorie, die nog slechts gedeeltelijk met de ervaring zijn vergeleken, verder te onderzoeken. Niet alleen zal men daardoor de waarde der theorie beter kunnen beoordeelen, maar als deze juist is bestaat er ook kans, dat het onderzoek der lichtverschijnselen ons in de kennis der electrische werkingen iets verder kan brengen.

In de volgende bladzijden heb ik vooreerst, na een korte uiteenzetting der theorie van MAXWELL, de lichtbeweging beschouwd in een isotroop medium met

* MAXWELL, *Phil. Trans. for* 1865. *Treatise on Electricity and Magnetism*, II. p. 383.

moleculaire structuur. Daardoor heb ik formules verkregen ter bepaling van den samenhang tusschen de voortplantingssnelheid van het licht en de dichtheid en samenstelling der middenstoffen en deze uitkomsten zijn vervolgens met de metingen der brekingsindices vergeleken. Bovendien is bij dit onderzoek ook de dispersie van het licht ter sprake gebracht.

I.

DE ELECTROMAGNETISCHE THEORIE VAN HET LICHT.

§ 1. Het uitgangspunt der theorie van MAXWELL is de onderstelling, dat onder den invloed eener electromotorische kracht in de deeltjes van elken isolator de beide electriciteiten kunnen worden gescheiden. Dit verschijnsel draagt den naam van diëlectrische polarisatie en kan wiskundig geheel op dezelfde wijze behandeld worden als de magnetische polarisatie, die door een magnetiseerende kracht wordt opgewekt.

Wanneer namelijk eenig deeltje aan de eene zijde positief, aan de andere negatief electrisch is, dan hangt de electrostatische werking, die het naar buiten, op afstanden, die zeer groot zijn ten opzichte der afmetingen van het deeltje, uitoefent, geheel af van zijn electrisch moment, waarbij dit laatste in richting en grootte op dezelfde wijze bepaald wordt, als het magnetische moment van een deeltje in de theorie van het magnetisme.

Wanneer verder diëlectrische polarisatie is opgewekt in een medium, dat als volkomen doorloopend mag beschouwd worden, dan kunnen de electrische momenten van een volume-element $d\tau$ aan eenig punt P, in de richtingen van drie (onderling loodrechte) assen der x, y, z worden voorgesteld door $\xi\, d\tau$, $\eta\, d\tau$, $\zeta\, d\tau$, waarbij ξ, η, ζ niet van $d\tau$ afhangen. Men noemt deze laatste grootheden de componenten der diëlectrische polarisatie in het punt P.

§ 2. Stelt men zich nu in een middenstof een willekeurige doorloopende diëlectrische polarisatie voor, dan kan men de electromotorische kracht * berekenen, die daardoor in een uitwendig punt wordt uitgeoefend. Men vindt dan, dat, wat de werking naar buiten betreft, de diëlectrische polarisatie (ξ, η, ζ) kan vervangen worden door eene gewone verdeeling van vrije electriciteit over de

* D. w. z. de kracht, werkende op een eenheid positieve electriciteit.

door den isolator ingenomen ruimte en over het grensvlak S daarvan *. Daarbij moet de dichtheid over de bedoelde ruimte

$$-\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

en de vlaktedichtheid aan het grensvlak

$$-(a\xi + b\eta + c\zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

zijn, wanneer wij onder a, b, c de richtingsconstanten verstaan der aan S naar de zijde van het medium getrokken normaal, dat wil zeggen de cosinus der hoeken, die deze normaal met de positieve assen vormt.

Ook bij de berekening der electromotorische kracht in een inwendig punt mag men de diëlectrische polarisatie (ξ, η, ζ) door de ladingen (1) en (2) vervangen, wanneer men slechts voor zulk een punt aan de uitdrukking electromotorische kracht een dergelijke beteekenis hecht als die, welke gewoonlijk aan de uitdrukking magnetiseerende kracht voor het inwendige van een gemagnetiseerd medium wordt gegeven, en welke met de polaire definitie der magnetiseerende kracht van THOMSON overeenkomt †.

§ 3. De theorie der diëlectrische polarisatie berust nu op de onderstelling, dat voor een isotropen isolator de diëlectrische polarisatie in elk punt dezelfde richting heeft als de electromotorische kracht (X, Y, Z) en evenredig daaraan is, zoodat men mag stellen

$$\xi = \varepsilon X, \quad \eta = \varepsilon Y, \quad \zeta = \varepsilon Z, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

waarbij ε een van den aard der stof afhankelijke constante voorstelt.

Men heeft werkelijk aangetoond, dat door deze onderstelling de invloed kan verklaard worden, dien de isolatoren bij de electrostatische verschijnselen uitoefenen. Tevens bleek daarbij, dat het specifiek induceerend vermogen K van eenig medium M ten opzichte van het luchtledige § met de constante ε verbonden is door de betrekking

$$K = \frac{1 + 4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon_0}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

* Verg. de overeenkomstige stelling voor de magnetische polarisatie (MAXWELL, *Electr. and Magn.* II. §§ 385, 386).

† Verg. THOMSON, *Papers on Electrostatics and Magnetism*, §§ 479, 517 (en 't bijvoegsel bij de laatste §), MAXWELL, *Electr. and Magn.*, §§ 395—400.

§ Het getal K geeft aan, hoeveelmaal grooter de capaciteit van een condensator is, wanneer de ruimte tusschen de bekleedselen met het medium M is gevuld, dan wanneer zij luchtledig is. (Hierbij is ondersteld, dat het eene bekleedsel het andere geheel omringt).

als ε_0 de constante der diëlectrische polarisatie is voor den aether, die in de luchtledige ruimte voorkomt. Daar men nu K proefondervindelijk kan bepalen, kan men dus de verhouding der waarden leeren kennen, die $1 + 4\pi\varepsilon$ in verschillende middenstoffen heeft, maar omtrent de waarde van ε_0 laten ons alle electrostatische verschijnselen geheel in 't onzekere.

§. 4. Om thans de door MAXWELL omtrent den aard van het licht opgestelde hypothese te leeren kennen, stellen wij ons voor, dat in de deeltjes van een homogeen, isotroop, niet geleidend medium M door eenige oorzaak een diëlectrische polarisatie is opgewekt en onderzoeken, hoe deze in den loop van den tijd moet veranderen. Wij nemen daarbij aan, dat het medium M zich tot in het oneindige uitstrekt, maar met 't oog op het volgende hoofdstuk zullen wij ons voorstellen, dat er hier en daar holten in voorkomen. In de overigens ledige ruimte binnen die holten kunnen dan nog deeltjes liggen, waarin eveneens electrische momenten bestaan. Eindelijk onderstellen wij, dat de diëlectrische polarisatie in het medium M steeds doorloopend is.

Wanneer wij nu de vergelijkingen (3) ook nog voor een veranderlijke diëlectrische polarisatie laten gelden, dan hebben wij daaraan nog slechts de betrekkingen toe te voegen, die X, Y, Z als afhankelijk van den toestand van het medium voorstellen. De electromotorische kracht F bestaat echter uit verschillende deelen, die wij achtereenvolgens zullen beschouwen.

§ 5. Een *eerste* deel dezer kracht (X_1, Y_1, Z_1) is van electrostatischen oorsprong. Bij de berekening er van kan men de diëlectrische polarisatie (ξ, η, ζ) in het medium M vervangen door de gewone electrische ladingen (1) en (2) over de door het medium ingenomen ruimte en over de oppervlakken S der holten. Is nu φ_1 de potentiaalfunctie voor deze ladingen, dan is in elk punt van M

$$\Delta \varphi_1 = 4\pi \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), * \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

in elk punt binnen een holte

$$\Delta \varphi_1 = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

en aan een der oppervlakken S

$$a\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)'\right] + b\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)'\right] + c\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)'\right] = 4\pi(a\xi + b\eta + c\zeta) \ldots (7)$$

---

* $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

In de laatste vergelijking zijn de waarden der differentiaalquotienten aan de binnenzijde van S door accenten van die aan de buitenzijde onderscheiden.

Is verder φ_2 de potentiaalfunctie voor de binnen de holten aanwezige electrische momenten, dan is voor eenig punt van M

$$\Delta \varphi_2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

en men heeft

$$X_1 = -\frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x}, \quad Y_1 = -\frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial y}, \quad Z_1 = -\frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

§ 6. Wanneer met den tijd t de diëlectrische polarisatie verandert en dus de electriciteit in de deeltjes van het medium in beweging verkeert, dan zal uit de verandering dier beweging in elk punt een electromotorische kracht der inductie voortvloeien.

Laat vooreerst in eenige molecule de hoeveelheden electriciteit $+e$ en $-e$ bestaan, ieder in een punt opeengehoopt en laat deze in de richting der x-as over een afstand δ van elkaâr gescheiden worden, zoodat de positieve electriciteit zich aan de zijde der positieve x bevindt, dan is het electrisch moment van het deeltje $m_x = e\,\delta$. Laat verder het positief electrische deeltje in de richting der positieve x-as de snelheid v, het negatief electrische in de tegengestelde richting de snelheid v' hebben, dan is $\frac{d\,\delta}{d\,t} = v + v'$, dus $\frac{d\,m_x}{d\,t} = e\,(v + v')$. Wij onderstellen nu, dat het deeltje $+e$, ten gevolge van zijne beweging, dezelfde werkingen uitoefent als een element $d\,s$ van een stroomgeleider in de richting der x-as, waarvoor, als i de stroomsterkte is, (die wij hier en in 't vervolg in electrostatische maat uitdrukken), $i\,d\,s = e\,v$ is. Evenzoo nemen wij aan, dat het deeltje $-e$, ten gevolge van zijne snelheid v', dezelfde werkingen uitoefent als een stroomelement, waarvoor $i\,d\,s = e\,v'$ is en dat dezelfde richting heeft, als het zooeven genoemde *. Uit een en ander volgt, dat de beweging der beide electriciteiten in de beschouwde molecule gelijk staat met een stroomelement, waarvoor $i\,d\,s = e\,(v + v') = \frac{d\,m_x}{d\,t}$ is.

* Dit zijn *onderstellingen*, daar zich misschien bij een gewonen electrischen stroom *beide* electriciteiten bewegen en het niet geheel zeker is, dat de beweging van slechts *éene* electriciteit dezelfde werkingen uitoefent. Intusschen pleiten hiervoor de door HELMHOLTZ meêgedeelde proeven van ROWLAND, *Pogg. Ann.* Bd. CLVIII.

Gemakkelijk kan men het hier gezegde uitbreiden tot het geval, dat ook in de richtingen der y — en z — as electrische momenten in de beschouwde molecule bestaan. Kortheidshalve zullen wij daarbij, als ds een element van een stroomgeleider is, dat met de assen de hoeken α, β, γ vormt, en waarin de stroomsterkte i is, de grootheden

$$i\,d\,s.\ \cos\alpha,\quad i\,d\,s.\ \cos\beta,\quad i\,d\,s.\ \cos\gamma$$

de componenten van het stroomelement noemen. Het blijkt dan, dat een deeltje, waarin het veranderlijke electrische moment (m_x, m_y, m_z) bestaat, dezelfde werkingen uitoefent als een stroomelement met de componenten

$$\frac{d\,m_x}{d\,t},\quad \frac{d\,m_y}{d\,t},\quad \frac{d\,m_z}{d\,t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Hieruit volgt dan verder, dat de verandering der diëlectrische polarisatie (ξ, η, ζ) in het medium M gelijk staat met een electrische strooming met de componenten

$$u = \frac{\partial\,\xi}{\partial\,t},\quad v = \frac{\partial\,\eta}{\partial\,t},\quad w = \frac{\partial\,\zeta}{\partial\,t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

§ 7. Om nu de hierdoor uitgeoefende inductie te berekenen moeten wij de wet der inductie voor stroomelementen kennen. HELMHOLTZ, wiens onderzoek * over de bewegingsvergelijkingen der electriciteit wij hier grootendeels volgen, heeft aangetoond, dat men voor de electromotorische kracht der inductie in eenig punt Q in de richting h, voortvloeiende uit een verandering der stroomsterkte i in een element ds van een stroomgeleider, mag stellen

$$F_h = -A^2 \frac{\partial\,q}{\partial\,t},$$

wanneer

$$q = \frac{i\,d\,s}{r} \cos(d\,s, h) + \frac{1-k}{2}\, i\,d\,s\, \frac{\partial^2 r}{\partial\,h\,\partial\,s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

is. Hierbij is r de afstand van eenig punt van ds tot Q, terwijl A en k constante grootheden voorstellen. De eerste heeft men uit de waarnemingen afge-

---

* HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern*, CRELLE's *Journal*, 72 (1870)

leid, maar alle tot nog toe volbrachte proeven laten de waarde van k geheel onbepaald.

§ 8. Zoeken wij thans de inductie in eenig punt Q (x, y, z), die het gevolg is van de stroomverdeeling (11) in het medium M. Daartoe beschouwe men u, v, w als functiën der coördinaten x', y', z' en lette vooreerst alleen op de electrische strooming binnen een element $dx'\ dy'\ dz' = d\tau$ aan het punt P (x', y', z'), op een afstand r van Q liggende. Men kan die strooming vervangen door drie stroomelementen, die de richtingen der coördinaatassen hebben. Berekent men dan door de formules der vorige § voor elk dezer stroomelementen de electromotorische kracht der inductie in Q in de richtingen der assen, dan verkrijgt men door optelling de werking van het element $d\tau$ en vervolgens door integratie die van het geheele medium M.

Op deze wijze vindt men daarvoor de componenten

$$-A^2 \frac{\partial U_1}{\partial t},\quad -A^2 \frac{\partial V_1}{\partial t},\quad -A^2 \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

wanneer

$$U_1 = \iiint \left\{ \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \left[u \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x'} + v \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y'} + w \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z'} \right] \right\} d\tau, \text{ enz.} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

gesteld wordt. Men kan hierbij de integratie ook over de geheele ruimte uitstrekken, daar toch binnen de holten $u = v = w = 0$ is.

§ 9. Bij de berekening van U_1 door middel van de vergelijking (14) denken wij ons vooreerst rondom Q een gesloten oppervlak B geconstrueerd en zoeken de waarde U'_1, die de integraal aanneemt, wanneer zij slechts over de buiten dat oppervlak liggende ruimte A wordt genomen *. Wij zullen dit in het vervolg aanwijzen, door aan de integraalteekens den index (A) toe te voegen.

Stelt men nu

$$\mathfrak{U}_1' = \iiint_{(A)} \frac{u}{r}\, d\tau\,,\quad \Psi_1' = \iiint_{(A)} \left(u \frac{\partial r}{\partial x'} + v \frac{\partial r}{\partial y'} + w \frac{\partial r}{\partial z'} \right) d\tau, \quad \ldots \quad (15)$$

dan is klaarblijkelijk

$$U_1' = \mathfrak{U}_1' + \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi_1'}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

* Bij eenige der volgende herleidingen moet men in 't oog houden, dat A de *geheele* ruimte buiten B is, de holten er onder begrepen.

De grootheid Ψ_1' kan in drie integralen gesplitst worden, die men resp. naar x', y', z' partieel kan integreeren. Men verkrijgt aldus voor Ψ_1' vooreerst een integraal I over de ruimte A, ten tweede integralen over de oppervlakken S en B en eindelijk dergelijke integralen over het „oneindig ver verwijderde grensvlak der ruimte." Wij zullen nu aannemen, dat de electrische bewegingen òf alle op eindigen afstand plaats hebben, of althans bij vergrooting van r zoo snel afnemen, dat de laatste integralen verdwijnen. Hebben nu de aan de oppervlakken S en B naar buiten getrokken normalen n en ν resp. de richtingsconstanten a, b, c en α β, γ, dan wordt

$$\Psi_1' = -\iint r(au + bv + cw)\,dS - \iint r(\alpha u + \beta v + \gamma w)\,dB - I. \quad . \; . \; . \; (17)$$

Hierin is

$$I = \iiint_{(A)} r\left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial w}{\partial z'}\right) d\tau,$$

of, wanneer men van (11) en (5) gebruik maakt,

$$I = \frac{1}{4\pi}\; \frac{\partial}{dt}\iiint_{(A)} r\,\Delta\,\varphi_1\,d\tau.$$

Men kan de hier voorkomende integraal nog transformeeren door een bekende uit het theorema van GREEN volgende stelling *. Men vindt dan, als men weer de integralen over het grensvlak der ruimte weglaat,

$$I = \frac{1}{4\pi}\iiint_{(A)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\Delta\, r\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\left(r\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} - \varphi_1\frac{\partial r}{\partial \nu}\right) dB +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\;\frac{\partial}{\partial t}\iint r\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)' - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right] dS.$$

Brengt men nu deze waarde in (17) over en let men daarbij op de betrekkingen (11) en (7), dan blijkt het, dat de integralen over de oppervlakken S wegvallen. Neemt men verder in aanmerking, dat $\Delta\, r = \frac{2}{r}$ is, dan verkrijgt men $\Psi_1' = \Psi_1'' + \Psi_1'''$, wanneer

$$\Psi_1'' = -\frac{1}{2\pi}\iiint_{(A)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cdot \frac{1}{r}\, d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

* Men zie b. v. GRINWIS, *Wisk. theorie der wrijvingselectriciteit*, p. 26, 3e Stelling.

en

$$\Psi_1''' = -\frac{1}{4\pi}\iint\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \nu} - r\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\;\partial \nu}\right)dB - \iint r\,(\alpha u + \beta v + \gamma w)\,dB$$

wordt gesteld.

Ten slotte wordt

$$U_1' = \mathfrak{u}_1' + \frac{1-k}{2}\left(\frac{\partial \Psi_1''}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1'''}{\partial x}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

§ 10. Om nu de grootheid U_1 te vinden hebben wij slechts de grens te zoeken, waartoe (19) nadert, als de afmetingen van het oppervlak B onbepaald afnemen. Daarbij blijkt het vooreerst, dat de grootheid $\frac{\partial \Psi_1'''}{\partial x}$ 0 tot grens heeft *, wanneer althans in het punt Q u, v, w, φ en de differentiaalquotienten er van eindige waarden hebben. Ten tweede merken wij op, dat blijkens (18) Ψ_1'' de potentiaalfunctie is voor een (volgens de wet van NEWTON werkende) massa, die met de dichtheid $-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ over de ruimte A verspreid is. Derhalve is $-\frac{\partial \Psi_1''}{\partial x}$ de door deze massa in Q in de richting der x-as uitgeoefende attractie en de grenswaarde van die grootheid zal de attractie zijn voor het geval, dat niet alleen de ruimte A, maar de geheele ruimte met een massa van de genoemde dichtheid gevuld is. Ook in dit geval kan men echter de attractie uit de potentiaalfunctie afleiden. Is deze hier Ψ_1, dan is dus $Lim.\ \frac{\partial \Psi_1''}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}$ en, wanneer wij in 't vervolg de integralen weer over de geheele ruimte nemen,

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\cdot\frac{1}{r}\,d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Eindelijk heeft men

$$Lim.\ \mathfrak{u}_1' = \mathfrak{u}_1 = \iiint \frac{u}{r}\,d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

* Het gemakkelijkst is dit aan te toonen, wanneer men aan het oppervlak B den vorm van een om Q als middelpunt beschreven bol toekent, waarvan de straal ρ tot 0 nadert. In elk der termen, waaruit $\frac{\partial \Psi_1'''}{\partial x}$ bestaat, treedt dan een factor ρ of ρ^2 op, vermenigvuldigd met een grootheid, die bij het afnemen van ρ eindig blijft, zoodat elke term 0 tot grens heeft.

en stelt men evenzoo

$$\mathfrak{V}_1 = \iiint \frac{v}{r} d\tau, \qquad \mathfrak{W}_1 = \iiint \frac{w}{r} d\tau, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

dan wor dt

$$U_1 = \mathfrak{U}_1 + \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad V_1 = \mathfrak{V}_1 + \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad W_1 = \mathfrak{W}_1 + \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}. \quad (23)$$

Natuurlijk gelden deze vergelijkingen zoowel binnen eenige holte als voor een punt van het medium M.

§. 11. Daar blijkens het bovenstaande Ψ_1, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{W}_1$ als de potentiaalfunctiën kunnen beschouwd worden van massa's, die met de dichtheden $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$, u, v, w verspreid zijn, volgt uit de vergelijking van POISSON

$$\triangle \Psi_1 = 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

$$\triangle \mathfrak{U}_1 = -4\pi u, \quad \triangle \mathfrak{V}_1 = -4\pi v, \quad \triangle \mathfrak{W}_1 = -4\pi w. \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Verder kan men dan uit (23) afleiden, dat

$$\triangle U_1 = -4\pi u + (1-k)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t}, \qquad \triangle V_1 = -4\pi v + (1-k)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial t},$$

$$\triangle W_1 = -4\pi w + (1-k)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

is.

Eindelijk volgt nog uit (21), (22), (23) en (24)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = (1-k)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \iiint \left\{ u\frac{x'-x}{r^3} + v\frac{y'-y}{r^3} + w\frac{z'-z}{r^3} \right\} d\tau.$$

Door integratie bij gedeelten gaat de laatste term na eenige herleiding over in $-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$. Derhalve is

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = -k\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

§. 12. Evenals wij hier de inductie berekend hebben, die het gevolg is van

de veranderlijke diëlectrische polarisatie in het medium M, kunnen wij ook die berekenen, welke uit een verandering der in de holten aanwezige electrische momenten (§ 4) voortvloeit. Zijn daarbij U_2, V_2, W_2 de functiën, die met U_1, V_1, W_1 overeenkomen, dan zijn de componenten dezer laatste inductie

$$-A^2 \frac{\partial U_2}{\partial t}, \quad -A^2 \frac{\partial V_2}{\partial t}, \quad -A^2 \frac{\partial W_2}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

en voor elk punt van het medium M gelden de met (26) en (27) overeenkomende betrekkingen

$$\triangle U_2 = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x\, \partial t}, \quad \triangle V_2 = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y\, \partial t}, \quad \triangle W_2 = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z\, \partial t} \text{ *}, \ldots (29)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z} = -k \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

---

* Laat in het punt (x', y', z') van een der holten een molecule P geplaatst zijn met het electrische moment (m_x, m_y, m_z) en laat $\varphi_{2(p)}$ de daarbij behoorende potentiaalfunctie in een punt $Q\ (x, y, z)$ op een afstand r van P zijn. Noemen wij evenceens $U_{2(p)}$, $V_{2(p)}$, $W_{2(p)}$ de aandeelen in U_2, V_2, W_2, die bij het stroomelement $\left(\frac{d m_x}{dt}, \frac{d m_y}{dt}, \frac{d m_z}{dt}\right)$ in de molecule P (§ 6) behooren. Dan is volgens (12)

$$U_{2(p)} = \frac{d m_x}{dt} \cdot \frac{1}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d m_x}{dt} \cdot \frac{\partial r}{\partial x'} + \frac{d m_y}{dt} \cdot \frac{\partial r}{\partial y'} + \frac{d m_z}{dt} \cdot \frac{\partial r}{\partial z'} \right),$$

dus, daar $\triangle \frac{1}{r} = 0$ en $\triangle r = \frac{2}{r}$ is,

$$\triangle U_{2(p)} = (1-k) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d m_x}{dt} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} + \frac{d m_y}{dt} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + \frac{d m_z}{dt} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \right).$$

Nu is echter

$$\varphi_{2(p)} = m_x \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} + m_y \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + m_z \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'},$$

dus

$$\triangle U_{2(p)} = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi_{2(p)}}{\partial x\, \partial t}.$$

Zulk eene vergelijking vindt men ook voor elke andere molecule P en men vindt dan de eerste van (29) door deze alle op te tellen. Ook de andere vergelijkingen (29) en (30) worden door eene dergelijke beschouwing verkregen.

Uit (13) en (28) volgt ten slotte voor de componenten van het *tweede* deel der electromotorische kracht

$$X_2 = -A^2 \frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial t}, \quad Y_2 = -A^2 \frac{\partial(V_1 + V_2)}{\partial t}, \quad Z_2 = -A^2 \frac{\partial(W_1 + W_2)}{\partial t} \quad \ldots \quad (31)$$

§. 13. Er blijft thans nog een *derde* deel der electromotorische kracht ter beschouwing over. Het is namelijk mogelijk, dat onder den invloed der electrische bewegingen in de binnen de holten liggende deeltjes magnetische momenten $(\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z)$ worden opgewekt en eveneens in het medium M een magnetische polarisatie. Zoodra dit het geval is zal de verandering van dezen magnetischen toestand weer in elk punt een electromotorische kracht der inductie ten gevolge hebben.

Zijn nu λ, μ, ν de componenten der magnetische polarisatie (dus $\lambda\, d\, \tau$, $\mu\, d\, \tau$, $\nu\, d\, \tau$ de magnetische momenten van een volumeelement $d\,\tau$), L, M, N die der magnetiseerende kracht, dan moet voor elk punt van het medium

$$\lambda = \vartheta L, \qquad \mu = \vartheta M, \qquad \nu = \vartheta N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

zijn, waarbij ϑ een constante is.

§ 14. De magnetiseerende kracht G bestaat echter uit twee deelen. Het eerste deel is een gevolg van den magnetischen toestand zelf en heeft tot componenten

$$L_1 = -\frac{\partial(\chi_1 + \chi_2)}{\partial x}, \quad M_1 = -\frac{\partial(\chi_1 + \chi_2)}{\partial y}, \quad N_1 = -\frac{\partial(\chi_1 + \chi_2)}{\partial z}, \quad \ldots \quad (33)$$

als χ_1 de magnetische potentiaalfunctie is, die bij de polarisatie λ, μ, ν) in het medium en χ_2 die, welke bij de momenten $(\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z)$ behoort. Daarbij is dan voor elk punt van M

$$\Delta \chi_1 = 4\pi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \; \Delta \chi_2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

welke vergelijkingen met (5) en (8) overeenkomen.

§ 15. Ten tweede wordt door de boven beschouwde electrische bewegingen een magnetiseerende kracht uitgeoefend, die men door middel van de bekende wet van BIOT en SAVART kan berekenen. Volgens die wet is namelijk de magnetiseerende kracht G_p, die door een stroomelement $d\,s$ (met de stoomsterkte i) aan het punt P (x', y', z') in een punt Q (x, y, z) wordt uitgeoefend,

$$G_p = \frac{A\, i\, d\, s\, \sin\,(r, d\, s)}{r^2}$$

Deze kracht is gericht volgens een loodlijn op het vlak, dat men door ds en r kan brengen, terwijl men op bekende wijze kan aangeven, naar welke zijde van dit vlak die loodlijn moet worden getrokken.

Om nu zonder dubbelzinnigheid de componenten van G_p op te stellen is het noodig, de keus van ons coördinatenstelsel nader te bepalen. Wij stellen daaromtrent vast, dat een wenteling van de positieve x — naar de positieve y-as (over een rechten hoek) in richting met de beweging der wijzers van een uurwerk overeenstemt, wanneer de beschouwer zich aan de zijde der positieve z-as bevindt. Zijn dan α , β , γ de hoeken, die ds met de positieve assen vormt, dan zijn de componenten van G_p *

$$\left.\begin{aligned} A\,i\,ds\left[\cos\beta\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)-\cos\gamma\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right] &= A\,(-k_1+k_2)\;,\\ A\,i\,ds\left[\cos\gamma\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] &= A\,(-k_3+k_4)\;,\\ A\,i\,ds\left[\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)-\cos\beta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right] &= A\,(-k_5+k_6)\;, \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(35)$$

wanneer

$$k_1 = -\,i\,ds\cos\beta\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\ \text{enz.}$$

is.

§ 16. Passen wij nu het zoo even gevondene toe, om de magnetiseerende kracht te berekenen, die door de stroomverdeeling (u , v , w) in het medium M in eenig punt Q (x , y , z) wordt uitgeoefend. De electrische strooming binnen een element $d\tau$ aan het punt P (x' , y' , z') staat gelijk met een stroomelement met de componenten $u\,d\tau$, $v\,d\tau$, $w\,d\tau$ en de daardoor uitgeoefende magnetiseerende kracht kan dus uit (35) onmiddellijk worden gevonden. Daarbij wordt dan $k_1 = -v\,d\tau\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$ en deze grootheid is dus de attractie, die in Q in de richting der z-as zou worden uitgeoefend door het element $d\tau$, wanneer dit een stof met de dichtheid v bevatte.

* Bij de berekening van deze grootheden kan men gebruik maken van de omstandigheid dat $\frac{1}{2}\,r\,ds\,\sin\,(r\,,\,ds)$ den inhoud van den driehoek voorstelt, die ds tot basis en Q tot top heeft, en dat men dus de componenten van G_p vindt, door de projectiën van dezen driehoek op de coördinaatvlakken met $\frac{2Ai}{r^3}$ te vermenigvuldigen.

Bij het integreeren over de geheele ruimte, zooals dit voor het zoeken der geheele magnetiseerende kracht noodig is, levert dus k_1 de attractie in Q in de genoemde richting op voor het geval, dat een stof met de dichtheid v over de geheele door het medium ingenomen ruimte verspreid is. Nu is echter voor deze stof blijkens (22) $\mathfrak{V}_1$ de potentiaalfunctie, zoodat k_1 bij de bedoelde integratie $-\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z}$ oplevert. Evenzoo geeft k_2 bij de integratie $-\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial y}$, zoodat de component der gezochte magnetiseerende kracht in de richting der x-as $A\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial y}\right)$, of, blijkens (23), $A\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$ wordt. De andere componenten zijn $A\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}-\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)$, $A\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}-\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)$ en als men nog op dezelfde wijze de magnetiseerende kracht berekent, die door de electrische bewegingen binnen de holten wordt uitgeoefend, dan vindt men voor de componenten van het tweede deel van G

$$L_2=A\left\{\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial z}-\frac{\partial(W_1+W_2)}{\partial y}\right\},\qquad M_2=A\left\{\frac{\partial(W_1+W_2)}{\partial x}-\frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial z}\right\},$$

$$N_2=A\left\{\frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial y}-\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial x}\right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36)$$

§ 17. Om nu eindelijk de inductie te vinden, die uit een verandering van den magnetischen toestand ontstaat, beschouwen wij vooreerst een deeltje P in het punt (x', y', z') met het veranderlijke magnetische moment $(\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z)$. Bij de berekening der daardoor uitgeoefende werking kan men het moment $\mathfrak{m}_x$ in de richting der x-as vervangen door een oneindig kleinen cirkelstroom in een vlak door P evenwijdig aan het $y\,z$-vlak gebracht. Het middelpunt daarvan moet in P liggen en tusschen den straal ϱ en de stroomsterkte i moet de betrekking

$$A\, i\, \pi\, \varrho^2=\mathfrak{m}_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (37)$$

bestaan, terwijl eindelijk de richting van den stroom met die eener wenteling van de positieve z- naar de positieve y-as moet overeenstemmen.

Om nu de werking van dezen stroom in een punt Q (x, y, z) in de richting der y-as te vinden kan men van de formule (12) gebruik maken. Men berekene namelijk (voor h de richting der y-as nemende) de grootheid q voor een element van den cirkelstroom en integreere dan over de geheele uitgestrektheid daarvan.

Daarbij levert de laatste term van (12) 0 op, daar hij een differentiaalquotient naar s is, zoodat men slechts de grootheid

$$\frac{i\,d\,s}{r}\cos(d\,s, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

heeft te integreeren.

Wij trekken nu in het vlak van den stroom uit P een lijn evenwijdig aan de z-as en bepalen de plaats van een punt P' van den cirkel door den hoek ω, dien $P\,P'$ met deze lijn vormt, waarbij een draaiing in de richting van den stroom als positief beschouwd wordt. Dan is $ds = \varrho\, d\omega$, $\cos(ds, y) = \cos\omega$ en, daar de cirkelstroom oneindig klein is,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_p} + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'}\right)_p \cdot \varrho \sin\omega + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'}\right)_p \cdot \varrho \cos\omega.$$

In de laatste vergelijking wijst de index p de waarden in het middelpunt aan.

Men substitueere de aangegeven waarden in (38) en integreere tusschen de grenzen $\omega = 0$ en $\omega = 2\pi$. De uitkomst is dan

$$Q = \pi\, i\, \varrho^2 \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'}\right)_p,$$

of, wanneer men op (37) let en den index p verder weg laat,

$$Q = \frac{1}{A}\,\mathfrak{m}_x \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} = -\frac{1}{A}\,\mathfrak{m}_x \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}.$$

Stelt men dus kortheidshalve

$$\frac{\mathfrak{m}_x}{r} = \mathfrak{L},$$

dan wordt

$$Q = -\frac{1}{A}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}$$

en de electromotorische kracht der inductie, door den cirkelstroom, of door het moment $\mathfrak{m}_x$ in Q in de richting der y-as uitgeoefend is

$$-A^2 \frac{\partial Q}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}.$$

Evenzoo is de inductie in de richting der z-as $-A \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}$, terwijl die in de richting der x-as 0 wordt.

Op gelijke wijze kan men ook de inductie berekenen, die door de momenten $\mathfrak{m}_y$ en $\mathfrak{m}_z$ wordt uitgeoefend en men vindt aldus voor de totale inductie, behoorende bij het deeltje P, de componenten

$$A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right),\ A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}\right),\ A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\right), \quad . \; . \; (39)$$

waarbij nog $\mathfrak{M} = \dfrac{\mathfrak{m}_y}{r}$, $\mathfrak{N} = \dfrac{\mathfrak{m}_z}{r}$ is gesteld. Hierbij valt nog op te merken, dat $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ de potentiaalfunctiën in Q zijn voor massa's $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ in het punt P geplaatst.

§. 18. Wanneer thans in het medium M de magnetische polarisatie (λ, μ, ν) bestaat en in de deeltjes binnen de holten de magnetische momenten $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ zijn opgewekt, dan kunnen wij, om de daardoor in eenig punt (x, y, z) uitgeoefende inductie te berekenen, op elk magnetisch deeltje de beschouwingen der vorige § toepassen. Let men op de beteekenis van $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, dan kan men de uitkomst onmiddellijk uit (39) afleiden.

Laat namelijk $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ de potentiaalfunctiën zijn voor massa's, die over de door het medium ingenomen ruimte resp. met de dichtheden λ, μ, ν zijn verdeeld, en laat evenzoo $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2$ de potentiaalfunctiën zijn voor het geval, dat men aan elke molecule binnen de holten resp. de massa's $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ toekent, dan zijn de componenten van het *derde* deel der electromotorische kracht

$$X_3 = A \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2)}{\partial y} - \frac{\partial(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{\partial z}\right\},\quad Y_3 = A \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)}{\partial z} - \frac{\partial(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2)}{\partial x}\right\},$$

$$Z_3 = A \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{\partial x} - \frac{\partial(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)}{\partial y}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

Uit de voor $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2$ gegeven bepaling volgt nog voor elk punt van het medium M

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta \mathfrak{L}_1 = -4\pi\lambda, & \Delta \mathfrak{M}_1 = -4\pi\mu, & \Delta \mathfrak{N}_1 = -4\pi\nu, \\ \Delta \mathfrak{L}_2 = 0, & \Delta \mathfrak{M}_2 = 0, & \Delta \mathfrak{N}_2 = 0, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (41)$$

terwijl men bovendien gemakkelijk kan aantoonen, dat

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial z} = -\chi_1 \text{ en } \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial z} = -\chi_2 \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

is.

§ 19. Wij hebben thans de totale electromotorische en magnetiseerende kracht leeren kennen en voor elk punt van het medium moet nu

$$\frac{\xi}{\varepsilon} = X_1 + X_2 + X_3, \quad \frac{\eta}{\varepsilon} = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad \frac{\zeta}{\varepsilon} = Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

$$\frac{\lambda}{\vartheta} = L_1 + L_2, \qquad \frac{\mu}{\vartheta} = M_1 + M_2, \qquad \frac{\nu}{\vartheta} = N_1 + N_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

zijn.

Men kan intusschen uit de verkregen vergelijkingen nog andere meer eenvoudige afleiden. Vooreerst volgt uit (43)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_2}{\partial z} + \frac{\partial Z_3}{\partial y} - \frac{\partial Y_3}{\partial z} \right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Nu is echter blijkens (9)

$$\frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z} = 0,$$

blijkens (31) en (36)

$$\frac{\partial Z_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_2}{\partial z} = A \frac{\partial L_2}{\partial t},$$

en tengevolge van (40), (41), (42) en (43)

$$\frac{\partial Z_3}{\partial y} - \frac{\partial Y_3}{\partial z} = A \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial x} \left\{ \frac{\partial (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2)}{\partial z} \right\} - A \frac{\partial}{\partial t} \Delta (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) =$$

$$= -A \frac{\partial^2 (\chi_1 + \chi_2)}{\partial t \, \partial x} + 4 \pi A \frac{\partial \lambda}{\partial t} = A \frac{\partial L_1}{\partial t} + 4 \pi A \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

Substitueert men deze waarden in (45) en let men daarbij op de eerste der vergelijkingen (44), dan komt er

en evenzoo is
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} &= A\,\varepsilon\,\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\,\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= A\,\varepsilon\,\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\,\frac{\partial \mu}{\partial t}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} &= A\,\varepsilon\,\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\,\frac{\partial \nu}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Op een dergelijke wijze kan men uit (43) een uitdrukking afleiden voor $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$, voor welke grootheid wij kortheidshalve P zullen schrijven. Men neme daarbij in aanmerking, dat volgens (9), (5) en (8)

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} = -\triangle(\varphi_1 + \varphi_2),$$

volgens (31), (27) en (30)

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_2}{\partial z} = A^2\,k\,\frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t^2}$$

en blijkens (40)

$$\frac{\partial X_3}{\partial x} + \frac{\partial Y_3}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z} = 0$$

is. Men vindt dan, als men $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ stelt,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\varepsilon\,\triangle\,\varphi + A^2\,k\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

Even als hier met (43) kan men ook met (44) te werk gaan, waarbij men op (33), (36), (26), (29), (27), (30), (11) moet letten. Er komt dan

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z} = A\,\vartheta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial t} - 4\pi\frac{\partial \xi}{\partial t}\right), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x} = A\,\vartheta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial t} - 4\pi\frac{\partial \eta}{\partial t}\right),$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} = A\,\vartheta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial t} - 4\pi\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = - \vartheta \, \Delta \chi, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

als $\chi = \chi_1 + \chi_2$ is.

Eindelijk is nog blijkens (5), (8) en (34)

$$\Delta \varphi = 4 \pi P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (IV)$$

$$\Delta \chi = 4 \pi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right).$$

Elimineert men χ uit de laatste vergelijking en (46), dan verkrijgt men

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (V)$$

en de vergelijkingen (I)—(V) bevatten nu nog slechts ξ, η, ζ, λ, μ, ν, φ.

§ 20. Wanneer het medium M geheel doorloopend is, dan gelden deze vergelijkingen in elk punt en zijn, zoals HELMHOLTZ heeft aangetoond, voldoende, om ξ, η, ζ, λ, μ, ν en φ als functiën van plaats en tijd te bepalen, wanneer men er nog de voorwaarde aan toevoegt, dat deze grootheden op oneindigen afstand verdwijnen.

Stelt men nu kortheidshalve

$$4 \pi \varepsilon (1 + 4 \pi \vartheta) A^2 = R^2, \quad 1 - \frac{(1 + 4 \pi \vartheta)(1 + 4 \pi \varepsilon)}{k} = S, \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

dan kan men uit (I)—(V) nog de volgende vergelijkingen, die alleen ξ, η, ζ bevatten, afleiden:

$$\Delta \xi = R^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \Delta \eta = R^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \Delta \zeta = R^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (48)$$

Hiervan wordt b. v. de eerste verkregen door de derde en tweede der vergelijkingen (I), naar y en z gedifferentieerd, van elkaâr af te trekken en uit de verkregen vergelijking eerst met behulp der eerste van (III) μ en ν en vervolgens door middel van (II) en (IV) φ te elimineeren.

§ 21. Nu hebben de vergelijkingen (48) volkomen denzelfden vorm als de vergelijkingen, die de oneindig kleine verplaatsingen ξ, η, ζ der deeltjes van een veerkrachtig vast lichaam als functiën van plaats en tijd bepalen, en hieruit volgt, dat de electrische bewegingen in onzen isolator met de bewegingen der

deeltjes van zulk een lichaam overeenkomen. Op dezelfde wijze dus, als zich in veerkrachtige lichamen een verstoring van het evenwicht naar alle zijden met eindige snelheid voortplant, moet dit ook in een diëlectrisch medium met een verstoring van het electrische evenwicht het geval zijn. Verder is het bekend, dat in elastische lichamen een regelmatige voortplanting van transversale en longitudinale trillingen mogelijk is, en op dezelfde wijze moeten zich ook in den isolator transversale en longitudinale *electrische trillingen*, d. w. z. periodieke veranderingen der diëlectrische polarisatie, kunnen uitbreiden. Voor de voortplantingssnelheden dezer transversale en longitudinale trillingen vindt men dan resp.

$$V = \frac{1}{R} = \frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}, \qquad V = \frac{\sqrt{1-S}}{R} = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon k}} \; . \; . \; . \; (49)$$

Hierbij valt nog op te merken, dat bij de transversale electrische trillingen overal $P = 0$, bij de longitudinale $\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$ is. In overeenstemming daarmede is dan ook (verg. (I)—(V)) bij de eerste trillingen $\varphi = 0$, bij de laatste $\lambda = \mu = \nu = 0$.

§ 22. Wanneer men de waarde der in (49) voorkomende constante A uit electromagnetische metingen wil afleiden, zou men deze eigenlijk in de volkomen ledige ruimte moeten uitvoeren. Men verricht ze echter in de lucht en wanneer nu deze voor diëlectrische en magnetische polarisatie vatbaar is, zal de werkelijke waarde A van de waargenomen waarde A' verschillen. HELMHOLTZ heeft aangetoond, dat dan

$$A = \frac{A'}{\sqrt{(1+4\pi\varepsilon_0')(1+4\pi\vartheta_0')}}$$

is, wanneer ε_0' en ϑ_0' de voor de lucht geldende constanten zijn.

Wanneer echter in de lucht diëlectrische polarisatie kan opgewekt worden, dan moeten ook in deze middenstof de boven besproken electrische bewegingen kunnen plaats hebben. Om dan de voortplantingssnelheid V_0' der transversale trillingen in de lucht te verkrijgen, moet men in (49) $\varepsilon = \varepsilon_0'$, $\vartheta = \vartheta_0'$ stellen. Let men bovendien op de boven aangegeven waarde van A, dan komt er

$$V_0' = \frac{1}{A'}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0'}\right)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (50)$$

§ 23. Nu heeft men reeds lang opgemerkt, dat de grootheid $\frac{1}{A'}$, op weinig

na overeenstemt met de voortplantingssnelheid van het licht. Deze overeenstemming kan verklaard worden, wanneer men twee onderstellingen maakt, nl. ten eerste, dat in werkelijkheid het licht uit transversale electrische trillingen bestaat, en ten tweede, dat de constante ε_0' zoo groot is, dat men de omgekeerde waarde er van ten opzichte van de eenheid mag verwaarloozen, waardoor (50) in $V_0' = \frac{1}{A'}$ overgaat.

Op de eerste hypothese berust de door MAXWELL opgestelde electromagnetische theorie van het licht. Neemt men deze aan, dan wordt ook de bijonderstelling omtrent de waarde van ε_0' noodzakelijk. Nu is echter uit de metingen van het specifiek induceerend vermogen (§ 3) gebleken, dat de verhouding $\frac{1+4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon_0}$, voor vaste lichamen en vloeistoffen aanmerkelijk grooter dan de eenheid, voor gassen en voor den vrijen aether van de luchtledige ruimte zeer weinig van 1 verschillend is. Daaruit, in verband met het omtrent ε_0 gezegde, volgt, dat voor alle middenstoffen ε zoo groot moet zijn, dat de omgekeerde waarde ten opzichte van de eenheid mag verwaarloosd worden.

§ 24. Hieruit kan men een merkwaardig verband afleiden, dat er tusschen den brekingsindex van een diëlectrisch medium en zijn specifiek induceerend vermogen bestaan moet. Wanneer nl. n de absolute brekingsindex van eenig medium (met de constanten ε en ϑ) is en wanneer men met V_0, ε_0, ϑ_0 de voortplantingssnelheid van het licht en de constanten der diëlectrische en magnetische polarisatie voor den vrijen aether aanduidt, dan is volgens (49)

$$n^2 = \frac{V_0^2}{V^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1+4\pi\vartheta}{1+4\pi\vartheta_0}.$$

Wegens de groote waarden van ε en ε_0 mag men nu $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{1+4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon_0}$ stellen, welke laatste verhouding niet anders is dan het specifiek induceerend vermogen K van het beschouwde medium met betrekking tot het luchtledige (§ 3). Verder is het uit de waarnemingen gebleken, dat voor alle isolatoren $1+4\pi\vartheta$ zoo weinig van $1+4\pi\vartheta_0$ verschilt, dat men voor de verhouding dezer grootheden gerustelijk 1 mag stellen. Wij verkrijgen dientengevolge de eenvoudige betrekking

$$n^2 = K. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Uit deze vergelijking blijkt intusschen, dat de electromagnetische lichttheorie,

zooals zij hier is ontwikkeld, geen verklaring kan geven van de kleurschifting. MAXWELL, die het eerst de vergelijking (51) afleidde, is dan ook van meening, dat deze slechts voor oneindig lange lichtgolven geldt, „because these are the only waves whose motion can be compared with the slow processes by which whe determine the capacity of the dielectric.”

Verscheidene natuurkundigen hebben werkelijk de waarde van K voor verschillende isolatoren met die van n^2 voor oneindig lange golven vergeleken en daarbij de vergelijking (51) over het geheel bevestigd gevonden *.

II.

OVER DE LICHTBEWEGING IN EEN ISOTROPE MIDDENSTOF MET MOLECULAIRE STRUCTUUR.

§ 1. In het voorgaande hebben wij ons het medium, waarin de lichtbeweging plaats heeft, als volkomen homogeen en doorloopend voorgesteld. Voor den lichtaether bestaat er tot heden geen grond, aan de juistheid dezer opvatting te twijfelen, maar bij alle andere middenstoffen moet men, om den invloed van dichtheid en samenstelling te leeren kennen, met de moleculaire structuur rekening houden.

Wij zullen daarom thans de electrische bewegingen in een stelsel moleculen beschouwen, maar ik moet hierbij reeds vooraf opmerken, dat het ons niet zal gelukken, dit vraagstuk volledig op te lossen, maar dat wij ons met een eerste benadering zullen moeten tevreden stellen. Niet alleen toch zijn wij bijna geheel onbekend met het eigenlijke wezen der moleculen en van de electrische bewegingen, die er in kunnen plaats hebben, maar het vraagstuk wordt nog veel moeilijker door de omstandigheid, dat men de ruimte tusschen de moleculen als met aether gevuld moet aanmerken, waarbij dan onze onbekendheid met de wijze, waarop de moleculen in den aether liggen, nieuwe zwarigheden oplevert.

Dat werkelijk de aether tusschen de moleculen aanwezig is, zal men wel bij de gassen niet kunnen betwijfelen, daar toch de eigenschappen dezer lichamen bij toenemende verdunning geleidelijk in die van den vrijen aether overgaan. Maar ook bij vaste lichamen en vloeistoffen zou men op moeilijkheden stuiten,

---

* GIBSON en BARCLAY, *Phil. Trans.* 1871, p. 573; BOLTZMANN, *Pogg. Ann.*, Bd. 151, 153, 155; SCHILLER, *Pogg. Ann.*, Bd. 152; SILOW, *Pogg. Ann.*, Bd. 156, 158.

wilde men de ruimte tusschen hunne deeltjes als ledig beschouwen. Het zou dan moeilijk zijn in te zien, waarom de voortplantingssnelheid van het licht in deze lichamen steeds kleiner is dan in het luchtledige en bovendien is het mij gebleken, dat dan bij veranderingen in dichtheid de brekingsindex veel meer zou moeten veranderen, dan het geval is. Eindelijk wijst ook de invloed, dien de beweging der middenstoffen op de lichtverschijnselen uitoefent, op de aanwezigheid van den aether tusschen de moleculen der lichamen.

Of en op welke wijze de eigenschappen van den aether door de aanwezigheid der moleculen veranderd worden, is ons geheel onbekend. Wij zullen hier de zeer eenvoudige onderstelling maken, dat — behalve misschien in de onmiddellijke nabijheid der deeltjes — de eigenschappen van den aether dezelfde zijn, als in het luchtledige, dat met name de constanten ε en ϑ de waarden hebben, die wij vroeger met ε_0 en ϑ_0 hebben aangeduid. Zijn eerst de gevolgen dezer onderstelling met de ervaring vergeleken, dan blijve het aan later onderzoek overgelaten, te beslissen, of men misschien betere uitkomsten kan verkrijgen, door aan den aether eenigszins andere eigenschappen toe te kennen.

§ 2. Wij kunnen ons nu rondom elke molecule een kleinen bol S geconstrueerd denken, zoodat daarbuiten de aether de bovengenoemde eigenschappen bezit. Omtrent de eigenschappen der binnen dezen bol gelegen stof kan men dan zeer verschillende onderstellingen maken.

Het eenvoudigst werd de zaak, wanneer men mocht aannemen, dat in het middelpunt M van den overigens ledigen bol S een enkel deeltje geplaatst is, en dat daarin door een electromotorische kracht (X, Y, Z) een electrisch moment (m_x, m_y, m_z) in de richting van die kracht en evenredig daaraan en evenzoo door een magnetiseerende kracht (L, M, N) een magnetisch moment $(\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z)$ wordt opgewekt. Als $\varkappa$ en $\varkappa'$ constanten zijn zou men dan mogen stellen

$$m_x = \varkappa X, \quad m_y = \varkappa Y, \quad m_z = \varkappa Z, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\mathfrak{m}_x = \varkappa' L, \quad \mathfrak{m}_y = \varkappa' M, \quad \mathfrak{m}_z = \varkappa' N. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Om verder de werking van het deeltje naar buiten te leeren kennen, zou men behalve de werking dezer momenten ook nog de inductie en de magnetiseerende kracht moeten beschouwen, behoorende bij een stroomelement in M met de componenten

$$\frac{d m_x}{d t}, \quad \frac{d m_y}{d t}, \quad \frac{d m_z}{d t} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Zooals wij later zullen zien komt ook bij andere onderstellingen omtrent den

inhoud van den bol S alles op hetzelfde neer, als wanneer in het middelpunt een enkel deeltje geplaatst was. Wij zullen ons daarom voorloopig tot de behandeling van dit geval bepalen.

§ 3. In den onbegrensden aether hebben wij ons dus thans een aantal bolvormige holten S en in het middelpunt van elke daarvan een stoffelijk deeltje (molecule) voor te stellen. Voorloopig zullen wij daarbij aannemen, dat al de deeltjes en eveneens al de holten aan elkaâr gelijk zijn.

Bovendien maken wij nog een onderstelling omtrent de magnetische eigenschappen der deeltjes. De ondervinding heeft geleerd, dat men slechts een zeer kleine fout begaat, door voor elke isoleerende stof de vatbaarheid voor magnetische polarisatie gelijk aan die van den vrijen aether te stellen. In overeenstemming hiermede zullen wij aannemen, dat het moment, dat door een magnetiseerende kracht in eenig deeltje wordt opgewekt, gelijk is aan het moment, dat daardoor in den bol S ontstaan zou, indien deze slechts aether bevatte. Wanneer echter in dit laatste geval op den bol de uitwendige en over de geheele uitgestrektheid van S even groote magnetiseerende kracht (L, M, N) werkte, dan zou in elk punt van den bol een magnetische polarisatie ontstaan met de componenten

$$\lambda = \frac{\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} L, \quad \mu = \frac{\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} M, \quad \nu = \frac{\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} N^{*}. \quad . \quad . \quad (4)$$

en deze zou naar buiten dezelfde werking uitoefenen als een magnetisch moment in het middelpunt met de componenten

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} L, \quad \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} M, \quad \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} N,$$

waarbij ϱ den straal van den bol voorstelt.

---

* Daar ook λ, μ, ν over de geheele uitgestrektheid van den bol dezelfde waarden hebben, oefent deze magnetische polarisatie dezelfde werking uit als een verdeeling van vrij magnetisme over het boloppervlak met de dichtheid $a\lambda + b\mu + c\nu$ (a, b, c zijn de richtingsconstanten der naar buiten getrokken normaal). De daardoor in een inwendig punt uitgeoefende magnetiseerende kracht heeft echter de componenten $-\frac{4}{3}\pi\lambda$, $-\frac{4}{3}\pi\mu$, $-\frac{4}{3}\pi\nu$ en voegt men hierbij L, M, N, dan verkrijgt men, als men op (4) let, voor de componenten der totale magnetiseerende kracht $\frac{\lambda}{\vartheta_0}$, $\frac{\mu}{\vartheta_0}$, $\frac{\nu}{\vartheta_0}$, zooals het geval moet zijn.

Wij zullen dus in het vervolg voor elk deeltje

$$\varkappa' = \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

stellen.

§ 4. Wanneer nu in de deeltjes van het stelsel electrische bewegingen plaats hebben, zullen zich ook van elke molecule uit dergelijke bewegingen in den aether voortplanten, die aan de vergelijkingen (I)—(V) van het vorige hoofdstuk voldoen, wanneer men daarin voor ε en ϑ, ε_0 en ϑ_0 stelt. Het is nu de vraag, deze bewegingen en de terugwerking ervan op de in de holten geplaatste moleculen te onderzoeken.

Beschouwen wij daartoe vooreerst een enkel deeltje P, gelegen in de holte S in den overigens doorloopenden aether en laat daarin een electrisch moment m_x in de richting der x-as bestaan. Laat verder de wijze, waarop dit moment met den tijd verandert, worden aangegeven door de vergelijking

$$m_x = f_1(t). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Trekken wij door P een lijn L evenwijdig aan de x-as, dan is het gemakkelijk aan te toonen: vooreerst, dat de electromotorische kracht F, door het deeltje in eenig punt Q van den aether uitgeoefend, overal een richting heeft, gelegen in het vlak, dat men door Q en L kan brengen, terwijl de door P uitgeoefende magnetiseerende kracht G loodrecht op dat vlak gericht is; ten tweede, dat in twee punten Q en Q', die op een door P getrokken rechte lijn op gelijke afstanden van P liggen, zoowel F als G gelijk zijn, maar dat F in Q en Q' dezelfde, daarentegen G in de beide punten tegengestelde richting heeft; eindelijk, dat F en G dezelfde waarden hebben voor alle punten van een om L als as beschreven cirkel.

Het is nu waarschijnlijk, dat de diëlectrische en magnetische polarisatie, die in den aether worden opgewekt, resp. dezelfde eigenschappen zullen bezitten, als zooeven voor de electromotorische en magnetiseerende kracht werden aangevoerd.

Verder ligt het voor de hand, aan te nemen, dat door het deeltje P zoowel transversale als longitudinale trillingen in den aether worden opgewekt. Wij zullen nu vooreerst twee dergelijke bewegingstoestanden zoeken, die tevens aan de bovengenoemde voorwaarden voldoen.

§ 5. Bij transversale trillingen is (I, § 21) $\varphi = 0$, terwijl men uit de vergelijkingen (I), (III) en (V) van het vorige hoofdstuk gemakkelijk vindt

$$\Delta \lambda = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}, \quad \Delta \mu = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}, \quad \Delta \nu = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

waarbij V_0 wederom de voortplantingssnelheid der transversale trillingen in den aether is. De eerste van deze vergelijkingen wordt verkregen door de tweede en derde van (III), resp. naar z en y gedifferentieerd, van elkaâr af te trekken en daarbij (I) en (V) in aanmerking te nemen.

Zoeken wij nu vooreerst een functie ψ_1, die voldoet aan de vergelijking

$$\Delta \psi_1 = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

en slechts afhankelijk is van t en van den afstand r tot P. Dan is

$$\Delta \psi_1 = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r},$$

zoodat (8) wordt

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2},$$

of, na vermenigvuldiging met r,

$$\frac{\partial^2 (\psi_1 r)}{\partial r^2} = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 (\psi_1 r)}{\partial t^2}.$$

Hieraan voldoet, gelijk men weet, als F een willekeurige functie is,

$$\psi_1 r = F\left(t - \frac{r}{V_0}\right), \quad \text{of} \quad \psi_1 = \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V_0}\right). \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Uit deze oplossing der vergelijking (8) kan men dan verder door differentiatie naar de coördinaten andere afleiden *. Derhalve voldoen aan de vergelijkingen (7) de waarden

$$\lambda = 0, \qquad \mu = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \qquad \nu = \frac{\partial \psi_1}{\partial y},$$

---

* De oplossingen der vergelijking (8), die aldus verkregen worden, gaan voor $V_0 = \infty$ over in de harmonische bolfunctiën, die aan de vergelijking $\Delta \psi_1 = 0$ voldoen en door differentiatie uit $\frac{C}{r}$ worden afgeleid.

die zoo gekozen zijn, dat aan de vergelijking (V) van het vorige hoofdstuk en tevens aan de in de vorige § gestelde voorwaarden voldaan is.

Uit de vergelijkingen (III) volgt nu verder, daar $\varphi = 0$ gesteld is, wanneer men met het teeken $'F$ een functie aanduidt, waarvan F de afgeleide is,

$$\xi = -\frac{1}{4\pi A \vartheta_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{r}\,'F\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right],$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi A \vartheta_0}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{1}{r}\,'F\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right], \qquad \zeta = \frac{1}{4\pi A \vartheta_0}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[\frac{1}{r}\,'F\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right],$$

welke waarden met die van λ, μ, ν werkelijk een juiste oplossing van het stelsel vergelijkingen (I)—(V) uitmaken.

Natuurlijk komt men tot een eveneens juiste oplossing, wanneer men al de aangegeven waarden met een zelfden constanten factor vermenigvuldigt. Aldus kan men de volgende waarden verkrijgen, waarbij $'F = f_1$ en dus $F = f_1'$ is gesteld. Hier is f_1 het functieteeken uit (6), f_1' de afgeleide functie van f_1.

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= -\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right],\\
\eta &= \alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right], \qquad \zeta = \alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right],\\
\lambda &= 0\\
\mu &= -\alpha.\,4\pi A \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r} f_1'\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right], \qquad \nu = \alpha.\,4\pi A \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{r} f_1'\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Deze vergelijkingen, waarin α een voorloopig onbekende constante grootheid is, stellen den *eersten* bewegingstoestand voor, dien wij zullen beschouwen.

§ 6. Bij longitudinale trillingen is (I, § 21) $\lambda = \mu = \nu = 0$ en aan de vergelijkingen (I), (III) en (IV) van het vorige hoofdstuk wordt dan voldaan door

$$\xi = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \zeta = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

De vergelijking (II) geeft dan verder, wanneer wij onder V_0 de voortplantingssnelheid der longitudinale trillingen in den aether verstaan,

$$\Delta \varphi = \frac{1}{V_0^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Nu voldoet aan deze vergelijking de grootheid $\varphi = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)$ op dezelfde

wijze als (9) aan (8) voldoet, terwijl ook hier door differentiatie naar de coördinaten juiste oplossingen worden verkregen. Aan de bewegingsvergelijkingen wordt derhalve voldaan, wanneer wij stellen

$$\varphi = 4\pi\beta \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right],$$

$$\xi = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right],\ \eta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right],\ \zeta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right], \quad . \ (B)$$

waarbij β een constant getal is. Bij de keus van dezen *tweeden* bewegingstoestand is wederom op de in § 4 gestelde voorwaarden gelet.

Wij zullen nu aantoonen, dat men werkelijk α en β zoo kan bepalen, dat (A) en (B) te zamen den bewegingstoestand voorstellen, die door het deeltje P in den omringenden aether wordt opgewekt.

§ 7. Verbeelden wij ons daartoe vooreerst den bewegingstoestand (A) uitgestrekt over de geheele ruimte buiten den bol S en zoeken wij de electromotorische en de magnetiseerende kracht, die ten gevolge daarvan in eenig punt werken. Wij zullen daarbij de waarden (A) ter onderscheiding van (B) van den index $_1$ voorzien en het middelpunt P van S tot oorsprong van ons coördinatenstelsel kiezen.

Zooals wij in het vorige hoofdstuk zagen is het ter berekening van de electromotorische en magnetiseerende kracht voldoende, de functiën φ_1, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{W}_1$, Ψ_1, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, χ_1 — die wij hier door dezelfde letters zonder index zullen aanduiden — te kennen.

Wat vooreerst φ (I, § 5) betreft, merken wij op, dat $\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0$ is en dat dus alleen aan het bolopppervlak S vrije electriciteit optreedt. Wanneer a, b, c de richtingsconstanten der aan dit oppervlak naar buiten getrokken normaal zijn, dan is de vlaktedichtheid aan 't oppervlak $\sigma = -(a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1)$, of, volgens (A), wanneer wij kortheidshalve voor $f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)$ f_1 schrijven,

$$\sigma = \alpha\left(a\Delta - a\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - c\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \alpha\left(a\Delta - a\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \alpha a \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} f_1\right].$$

Stelt men dus aan 't boloppervlak — voor $r = \varrho$ —

$$\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} f_1\right] = C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

welke grootheid nog slechts t als veranderlijke bevat, dan is de vlaktedichtheid aan dat oppervlak $\sigma = a\,\alpha\,C$. Wanneer echter vrije electriciteit met deze dichtheid over het boloppervlak verdeeld is, dan is de potentiaalfunctie buiten den bol

$$\varphi = \alpha \frac{4}{3} \pi \rho^3 C \frac{x}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

en er binnen

$$\varphi = \alpha \frac{4}{3} \pi C x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

§ 8. De grootheid $\mathfrak{u}$ (I, § 10) is de potentiaalfunctie voor een massa, die met de dichtheid $u = \frac{\partial \xi_1}{\partial t}$ over de ruimte buiten den bol S verspreid is. Daaruit volgt, dat buiten den bol

$$\Delta\, \mathfrak{u} = -\, 4\, \pi \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

en er binnen

$$\Delta\, \mathfrak{u} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

moet zijn, terwijl overal, met name aan het boloppervlak, zoowel $\mathfrak{u}$ als de eerste differentiaalquotienten ervan doorloopend moeten zijn. Bovendien moet $\mathfrak{u}$ op oneindigen afstand verdwijnen, wanneer, zooals wij steeds onderstellen, ook ξ_1 snel genoeg afneemt bij aangroeiing van r.

Zij nu $F_1(t)$ een functie, waarvan $f_1(t)$ de afgeleide is, dan wordt aan de voorwaarde (13) voldaan door de functie

$$\mathfrak{u}_1 = \alpha.\, 4\, \pi\, V_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\frac{1}{r} F_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \ldots\ldots\ldots (15)$$

Immers dan is

$$\Delta\, \mathfrak{u}_1 = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial t^2} = \alpha.\, 4\, \pi \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} f_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right] = -\, 4\, \pi \frac{\partial \xi_1}{\partial t}.$$

Stellen wij nu voor de werkelijke waarde van $\mathfrak{u}$ buiten den bol $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$, dan moet dus $\Delta\, \mathfrak{u}_2 = 0$ zijn. Bovendien moet $\mathfrak{u}_2$ buiten S doorloopend zijn en op oneindigen afstand verdwijnen, daar $\mathfrak{u}$ en $\mathfrak{u}_1$ deze eigenschappen bezitten.

Men vindt gemakkelijk

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{r}F_1\left(t-\frac{r}{V_0}\right)\right]=\left(1-\frac{3\,x^2}{r^2}\right)\left\{\frac{1}{r^3}F_1+\frac{1}{r^2\,V_0}f_1+\frac{1}{3\,r\,V_0^2}f_1'\right\}+\frac{2}{3\,r\,V_0^2}f_1'.$$

Stelt men derhalve aan 't boloppervlak — voor $r=\varrho$ —

$$\left.\begin{aligned}&4\,\pi\,V_0^2\left\{\frac{1}{r^3}F_1+\frac{1}{r^2\,V_0}f_1+\frac{1}{3\,r\,V_0^2}f_1'\right\}=A,\\ \text{en}\qquad&\\ &\frac{8}{3}\frac{\pi}{r}f_1'=B,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (16)$$

dan wordt aan dat oppervlak

$$\mathfrak{u}_1=\alpha\,A\,(1-3\,a^2)+\alpha\,B.$$

Wanneer dan nu binnen den bol

$$\mathfrak{u}_1=\alpha\,\frac{1}{\varrho^2}A\,(r^2-3\,x^2)+\alpha\,B\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (17)$$

wordt genomen, dan is $\mathfrak{u}_1$ aan 't oppervlak doorloopend en, wanneer men ook binnen den bol voor de totale waarde $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2$ schrijft, volgt uit de continuiteit van $\mathfrak{u}$ aan 't oppervlak ook die van $\mathfrak{u}_2$. Daar bovendien blijkens (17) $\Delta\,\mathfrak{u}_1=0$ is volgt uit (14) ook $\Delta\,\mathfrak{u}_2=0$.

Verder moet aan 't boloppervlak ook het differentiaalquotient van $\mathfrak{u}$ naar de normaal n doorloopend zijn. Daaruit volgt, wanneer wij de waarden der differentiaalquotienten aan de binnenzijde van S door accenten van die aan de buitenzijde onderscheiden.

$$\frac{\partial\,\mathfrak{u}_2}{\partial\,n}-\left(\frac{\partial\,\mathfrak{u}_2}{\partial\,n}\right)'=\left(\frac{\partial\,\mathfrak{u}_1}{\partial\,n}\right)'-\frac{\partial\,\mathfrak{u}_1}{\partial\,n}$$

en hier is het tweede lid uit (15) en (17) bekend.

Stelt men nu voor $r=\varrho$

$$\left.\begin{aligned}&4\,\pi\,V_0^2\,\frac{\partial}{\partial\,r}\left\{\frac{1}{r^3}F_1+\frac{1}{r^2\,V_0}f_1+\frac{1}{3\,r\,V_0^2}f_1'\right\}=A',\\ &\frac{8}{3}\,\pi\,\frac{\partial}{\partial\,r}\left[\frac{1}{r}f_1'\right]=B',\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (18)$$

dan verkrijgt men

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial n} - \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial n}\right)' = \alpha \left(\frac{2}{\varrho} A - A'\right)(1 - 3\,a^2) - \alpha B' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

De functie $\mathfrak{u}_2$ moet dus zoowel binnen als buiten het boloppervlak aan de vergelijking van LAPLACE voldoen, en bovendien overal eindig en doorloopend en op oneindigen afstand $= 0$ zijn, terwijl de eerste differentiaalquotienten aan de vergelijking (19) zijn gebonden. Nu weet men echter, dat de eenige functie, die aan deze voorwaarden voldoet, de potentiaalfunctie is voor een massa, die met de vlaktedichtheid

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varrho} A - A'\right)(3\,a^2 - 1) + \frac{\alpha}{4\pi} B' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

over het boloppervlak verdeeld is. Deze potentiaalfunctie kan gevonden worden door middel van de uit de theorie der harmonische bolfunctiën bekende stelling, dat de potentiaalfunctie voor een massa, die met de vlaktedichtheid $c\,(3\,a^2 - 1)$ (c constant) over het boloppervlak verdeeld is, buiten den bol de waarde $\frac{4}{5}\pi\varrho^4\left(\frac{3\,x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$ en er binnen de waarde $\frac{4}{5}\pi\frac{1}{\varrho}(3\,x^2 - r^2)$ heeft. Door hierin $c = \frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varrho} A - A'\right)$ te substitueeren verkrijgt men de potentiaalfunctie, behoorende bij den eersten term van (20). Die, welke bij den tweeden term behoort, is gemakkelijk aan te geven, daar deze term over het boloppervlak constant is. Voegt men bij de aldus voor $\mathfrak{u}_2$ gevonden waarde die van $\mathfrak{u}_1$, die reeds werd aangegeven, dan vindt men, dat buiten den bol

$$\mathfrak{u} = \alpha . 4\pi V_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right] + \alpha \frac{1}{5}\varrho^4\left(\frac{2}{\varrho} A - A'\right)\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \alpha\,\varrho^2 B \frac{1}{r} \; . \quad (21)$$

en er binnen

$$\mathfrak{u} = \alpha \frac{1}{5\,\varrho}\left(\frac{3}{\varrho} A + A'\right)(r^2 - 3\,x^2) + \alpha\,(B + B'\varrho) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

moet zijn.

Hierbij valt nog op te merken, dat wel is waar de functie F_1 door het op p. 29 gezegde niet geheel bepaald is, maar dat toch de bovenstaande vergelijkingen voor $\mathfrak{u}$ volkomen bepaalde waarden opleveren. Want van twee functiën, die beide f_1 tot afgeleide hebben moet het verschil constant zijn en men vindt gemakkelijk, als men op de waarden van A en A' let, dat de waarden van $\mathfrak{u}$ niet veranderen, wanneer men aan F_1 een constante grootheid toevoegt.

§ 9. Evenals wij hier $\mathfrak{U}$ berekend hebben kan men ook de grootheden $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, Ψ, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, χ bepalen, die blijkens het vorige hoofdstuk alle als potentiaalfunctiën zijn te beschouwen. Daar de wijze van berekenen geheel dezelfde is als de boven gevolgde zal ik mij tot het meêdeelen der uitkomsten bepalen. Men vindt voor een punt buiten den bol

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V} &= -\alpha .\, 4\pi V_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left[\frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right] + \alpha \frac{1}{5} \varrho^4 \left(\frac{2}{\varrho} A - A'\right) \frac{3\, xy}{r^5}, \\ \mathfrak{W} &= -\alpha .\, 4\pi V_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left[\frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right] + \alpha \frac{1}{5} \varrho^4 \left(\frac{2}{\varrho} A - A'\right) \frac{3\, xz}{r^5}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

$$\Psi = -\alpha\, \varrho^2 B' \frac{x}{r} + \alpha \frac{1}{5} \varrho^4 B' \frac{x}{r^3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

$$\mathfrak{L} = 0, \quad \chi = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \quad \alpha .\, 4\pi A \vartheta_0 . 4\pi V_0^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right] + \alpha .\, 4\pi A \vartheta_0\, \varrho^3 A \frac{z}{r^3}, \\ \mathfrak{N} &= -\alpha .\, 4\pi A \vartheta_0 . 4\pi V_0^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right)\right] - \alpha .\, 4\pi A \vartheta_0\, \varrho^3 A \frac{y}{r^3}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

en voor een inwendig punt

$$\mathfrak{V} = -\alpha \frac{1}{5\varrho}\left(\frac{3}{\varrho} A + A'\right) 3\, xy, \qquad \mathfrak{W} = -\alpha \frac{1}{5\varrho}\left(\frac{3}{\varrho} A + A'\right) 3\, xz, \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

$$\Psi = -\alpha \frac{1}{5\varrho} B' x\, (5\varrho^2 - r^2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$\mathfrak{L} = 0, \quad \chi = 0,$$

$$\mathfrak{M} = \alpha .\, 2\pi A \vartheta_0 B z, \quad \mathfrak{N} = -\alpha .\, 2\pi A \vartheta_0 B y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

§ 10. De electromotorische kracht, die nu ten gevolge van den bewegingstoestand (A) optreedt, bestaat blijkens het vorige hoofdstuk uit vier deelen, waarvan de componenten achtereenvolgens zijn

a) $$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \; -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \; -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

b) $$-A^2 \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \; -A^2 \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \; -A^2 \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t},$$

c) $$\frac{1}{2} A^2 (k-1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\, \partial t}, \; \frac{1}{2} A^2 (k-1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial t}, \; \frac{1}{2} A^2 (k-1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z\, \partial t};$$

d) $$A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z}\right),\qquad A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial x}\right),\qquad A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y}\right).$$

Zoeken wij door middel van deze uitdrukkingen eerst de electromotorische kracht in eenig punt van den aether buiten den bol S. Wij zullen daarbij sommige deelen dier kracht bepalen door electrische momenten en stroomelementen op te geven, die dezelfde werking uitoefenen. Stilzwijgend wordt daarbij ondersteld, dat die momenten en stroomelementen in het middelpunt P geplaatst en evenwijdig aan de x-as gericht zijn.

De vergelijking (11) geeft volgens a) een electromotorische kracht, gelijk aan de electrostatische kracht, die zou behooren bij een moment

$$\alpha.\frac{1}{3}A\varrho \text{ [illegible]} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ [illegible]}$$

Verder volgt blijkens b) uit de eerste termen van (21) en (23), daar $V_0^2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0(1+4\pi\vartheta_0)A^2}$ is, een electromotorische kracht met de componenten

$$\frac{\xi_1}{\varepsilon_0(1+4\pi\vartheta_0)},\qquad \frac{\eta_1}{\varepsilon_0(1+4\pi\vartheta_0)},\qquad \frac{\zeta_1}{\varepsilon_0(1+4\pi\vartheta_0)}.\;\ldots\ldots\; (b_1)$$

De tweede termen van (21) en (23) geven een electromotorische kracht gelijk aan de electrostatische werking van een moment

$$-\alpha.\frac{1}{5}A^2\varrho^5\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\varrho}\text{ [illegible]} - X\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ [illegible]}$$

Eindelijk levert de derde term van (21) een electromotorische kracht op, gelijk aan de inductie, die zou worden uitgeoefend door een stroomelement

$$\alpha\varrho b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ [illegible]}$$

wanneer men bij de berekening dier inductie door middel der vergelijking (12) van het vorige hoofdstuk slechts het *eerste* deel van q in aanmerking nam. Daarbij valt op te merken, dat dit eerste deel van q geen electromotorische kracht in de richtingen der y- en z-as zou opleveren.

Verder geeft volgens c) de eerste term van (24) een electromotorische kracht, gelijk aan die, welke men uit het *tweede* deel van q voor het stroomelement (c) zou vinden, zoodat wij de inductie van dit stroomelement in haar geheel hebben.

De tweede term van (24) geeft echter een electromotorische kracht gelijk aan de electrostatische werking van een moment

$$\alpha . \frac{1}{10} A^2 (1 - k) \varrho^4 . \frac{\partial B'}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a_3)$$

Eindelijk verkrijgt men nog uit de eerste termen van (25) volgens d) een electromotorische kracht met de componenten

$$\frac{4 \pi \vartheta_0}{\varepsilon_0 (1 + 4 \pi \vartheta_0)} \xi_1 , \quad \frac{4 \pi \vartheta_0}{\varepsilon_0 (1 + 4 \pi \vartheta_0)} \eta_1 , \quad \frac{4 \pi \vartheta_0}{\varepsilon_0 (1 + 4 \pi \vartheta_0)} \zeta_1 , \quad \ldots \ldots \quad (b_2)$$

en uit de laatste termen dier vergelijkingen een werking gelijk aan die van een moment

$$- \alpha . 4 \pi A^2 \vartheta_0 . \varrho^3 \frac{\partial A}{\partial t} . \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a_4)$$

§ 11. Vatten wij het gevondene samen, dan hebben wij dus ten gevolge van den bewegingstoestand (A) in elk punt van den aether een electromotorische kracht, die uit drie deelen bestaat.

Het eerste deel — (b_1) en (b_2) — heeft tot componenten $\frac{\xi_1}{\varepsilon_0}$, $\frac{\eta_1}{\varepsilon_0}$, $\frac{\zeta_1}{\varepsilon_0}$.

Het tweede deel is gelijk aan de electrostatische kracht, die zou worden uitgeoefend door een moment D in P, wanneer wij onder D de som der grootheden (a_1), (a_2), (a_3) en (a_4) verstaan.

Het derde deel eindelijk is gelijk aan de inductie, die men zou hebben, wanneer in P een stroomelement $\alpha \varrho^2 B'$ bestond.

Daar verder blijkens § 9 $\chi = 0$ is, zijn de componenten der magnetiseerende kracht (I, § 16)

$$A \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right), \quad A \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right), \quad A \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right).$$

Men vindt hieruit, dat deze kracht in elk punt van den aether uit twee deelen bestaat, waarvan het eene de componenten $\frac{\lambda}{\vartheta_0}$ $(= 0)$, $\frac{\mu}{\vartheta_0}$, $\frac{\nu}{\vartheta_0}$ heeft, terwijl het andere deel gelijk is aan de magnetiseerende kracht, die bij het stroomelement (b) zou behooren.

Uit het bovenstaande volgt, dat, wanneer wij thans in P in de richting der x-as een electrisch moment $-D$ plaatsen (dat *alleen* electrostatische werking

uitoefent) en evenzoo een stroomelement $-\alpha\varrho^2 B'$, de componenten der totale electromotorische kracht $\frac{\xi_1}{\varepsilon_0}, \frac{\eta_1}{\varepsilon_0}, \frac{\zeta_1}{\varepsilon_0}$ en die der magnetiseerende kracht $\frac{\lambda}{\vartheta_0}, \frac{\mu}{\vartheta_0}, \frac{\nu}{\vartheta_0}$ worden, zoodat dan de bewegingstoestand (A) werkelijk bestaan kan. Met andere woorden, om dezen bewegingstoestand te onderhouden is in P het moment $-D$ en het stroomelement $-\alpha\varrho^2 B'$ noodig.

§ 12. Hetgeen wij tot nu toe gevonden hebben geldt in het algemeen, hoe groot ook de straal ϱ der holte S moge zijn. Wij zullen thans echter zien, wat er van de grootheden $-D$ en $-\alpha\varrho^2 B'$ wordt, wanneer wij dien straal zeer klein stellen. Neemt men de waarden van C, A, A', B, B' in aanmerking, dan vindt men na ontwikkeling

$$-D = \alpha.\frac{4}{3}\pi\varrho^3.\frac{2}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho^2}f_1 + \frac{1}{\varrho V_0}f_1'\right) + \alpha.\frac{1}{5}A^2\varrho^4.4\pi V_0^2\left(\frac{5}{\varrho^4}f_1 + \frac{5}{\varrho^3 V_0}f_1' + \frac{2}{\varrho^2 V_0^2}f_1'' + \frac{1}{3\varrho V_0^3}f_1'''\right) +$$

$$+\alpha.\frac{1}{10}A^2(1-\delta)\varrho^4.\frac{8}{3}\pi\left(\frac{1}{\varrho^2}f_1'' + \frac{1}{\varrho V_0}f_1'''\right) + \alpha.4\pi A^2\vartheta_0\varrho^3.4\pi V_0^2\left(\frac{1}{\varrho^3}f_1 + \frac{1}{\varrho^2 V_0}f_1' + \frac{1}{3\varrho V_0^2}f_1''\right) =$$

$$= \alpha\Big[\left(f_1 + \frac{\varrho}{V_0}f_1'\right)\left\{\frac{8}{3}\pi + 4\pi A^2 V_0^2(1+4\pi\vartheta_0)\right\} + \frac{\varrho^2}{V_0^2}f_1''.\frac{4}{15}\pi A^2 V_0^2\left\{5(1+4\pi\vartheta_0) + (2-\delta)\right\} +$$

$$+\frac{\varrho^3}{V_0^3}f_1'''.\frac{4}{15}\pi A^2 V_0^2(2-\delta)\Big],$$

$$-\alpha\varrho^2 B' = \alpha.\frac{8}{3}\pi\left(f_1' + \frac{\varrho}{V_0}f_1''\right),$$

in welke uitdrukkingen f_1, f_1', enz. de waarden van $f_1\left(t-\frac{\varrho}{V_0}\right)$, $f_1'\left(t-\frac{\varrho}{V_0}\right)$, enz. voorstellen.

Deze functiën kunnen echter volgens het theorema van TAYLOR in reeksen naar de opklimmende machten van $\frac{\varrho}{V_0}$ ontwikkeld worden. Zoo is b. v.

$$f_1 = f_1(t) - \frac{\varrho}{V_0}f_1'(t) + \frac{\varrho^2}{2V_0^2}f_1''(t) - \text{enz.}$$

en door deze waarden in de voor $-D$ en $-\alpha\varrho^2 B'$ gevonden vergelijkingen over te brengen, verkrijgt men in de eerste termen met $f_1(t)$, $\frac{\varrho^2}{V_0^2}f_1''(t)$, enz., in de tweede daarentegen termen met $f_1'(t)$, $\frac{\varrho^2}{V_0^2}f_1'''(t)$ enz. als factor.

Nu mogen wij veilig aannemen, dat de straal ϱ der holte zoo klein is, dat gedurende den tijd $\tau = \frac{\varrho}{V_0}$, dien de transversale trillingen noodig hebben, om in den aether den afstand ϱ af te leggen, de functiën $f_1(t)$, $f_1'(t)$, enz. slechts uiterst weinig veranderen *. Daar dan echter $\frac{\varrho}{V_0} f_1'(t)$ juist de aangroeiing van $f_1(t)$ gedurende den tijd τ voorstelt mag men die grootheid ten opzichte van $f_1(t)$ verwaarloozen. Des te meer reden bestaat er om ook $\frac{\varrho^2}{V_0^2} f_1''(t)$ en de termen met de hoogere differentiaalquotienten weg te laten, zoodat men in de uitdrukking voor $-D$ slechts de termen met $f_1(t)$ behoeft te behouden. Evenzoo blijft in $-\alpha \varrho^2 B'$ slechts $f_1'(t)$ over. Neemt men bovendien in aanmerking, dat

$$4\pi A^2 V_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0(1 + 4\pi\vartheta_0)},\quad f_1(t) = m_x,\quad f_1'(t) = \frac{d m_x}{d t}$$

is, dan wordt

$$-D = \alpha\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) m_x,\quad -\alpha \varrho^2 B' = \alpha . \frac{8}{3}\pi \frac{d m_x}{d t} \ldots\ldots\ldots (29)$$

§ 13. Zoeken wij thans de electromotorische kracht, die tengevolge van den bewegingstoestand (A) in eenig punt (x, y, z) der holte werkt. Vooreerst volgt uit (12) een electromotorische kracht met de componenten

$$-\alpha . \frac{4}{3}\pi C,\qquad 0,\qquad 0.$$

Evenzoo verkrijgt men uit (22) en (26) de componenten

$$\alpha . \frac{1}{5\varrho}(3x^2 - r^2) A^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{\varrho} A + A'\right) - \alpha . A^2 \frac{\partial}{\partial t}(B + B'\varrho);$$

$$\alpha . \frac{1}{5\varrho} . 3xy A^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{\varrho} A + A'\right);\quad \alpha . \frac{1}{5\varrho} . 3xz A^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{\varrho} A + A'\right).$$

De componenten der electromotorische kracht, die uit (27) volgt, zijn

$$\alpha . \frac{1}{10\varrho} A^2(k-1)\frac{\partial B'}{\partial t}(2x^2 + r^2 - 5\varrho^2);\quad \alpha . \frac{1}{10\varrho} A^2(k-1)\frac{\partial B'}{\partial t} . 2xy;\quad \alpha . \frac{1}{10\varrho} A^2(k-1)\frac{\partial B'}{\partial t} . 2xz$$

---

* Bij enkelvoudige trillingen is dit het geval, wanneer ρ slechts zeer klein is vergeleken met de golflengte.

en eindelijk die, welke men uit (28) vindt

$$-\alpha\ 4\pi\vartheta_0\,.\,A^2\frac{\partial B}{\partial t},\qquad 0,\qquad 0.$$

Door middel van de waarden C, A, A', B, B' vindt men dus de componenten der gezochte electromotorische kracht en wanneer men nu in aanmerking neemt, dat ϱ en dus binnen de holte ook x, y, z, r zeer klein zijn (verg. de vorige §), dan kan men in de uitkomst een aantal termen verwaarloozen. Het blijkt dan, dat men aan de electromotorische kracht in elk punt der holte de richting der x-as en de overal gelijke grootte

$$\alpha\,.\,\frac{8}{3}\pi\,.\,\frac{1}{\varrho^3}m_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

mag toekennen. (Hierbij zijn termen verwaarloosd, die den factor $\alpha\,.\,\frac{1}{\varrho V_0^2}\frac{d^2 m_x}{d t^2}$ bevatten.)

Uit de in § 9 meêgedeelde waarden volgt eindelijk nog voor de componenten der magnetiseerende kracht in eenig punt der holte

$$0,\qquad \alpha\,.\,\frac{4}{3}\pi A\frac{z}{\varrho^3}\,.\,\frac{d m_x}{d t},\qquad \alpha\,.\,\frac{4}{3}\pi A\frac{y}{\varrho^3}\,.\,\frac{d m_x}{d t}. \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

§ 14. Op dezelfde wijze, als wij hier met (A) zijn te werk gegaan, kan men ook met den bewegingstoestand (B) handelen. Men vindt dan, dat men, om dezen te onderhouden, in P een electrisch moment

$$\beta\,.\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

en een stroomelement

$$-\beta\,.\,\frac{4}{3}\pi\frac{d m_x}{d t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

moet plaatsen. Bovendien werkt ook tengevolge van (B) in elk punt der holte een electromotorische kracht in de richting der x-as en de grootte daarvan is

$$\beta\,.\,\frac{8}{3}\pi\,.\,\frac{1}{\varrho^3}m_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

(Bij de afleiding van (32), (33) en (34) zijn grootheden weggelaten, die resp. de factoren $\beta \cdot \frac{\varrho^2}{V_0^2}\frac{d^2 m_x}{dt^2}$, $\beta \cdot \frac{\varrho^2}{V_0^2}\frac{d^3 m_x}{dt^3}$, $\beta \cdot \frac{1}{\varrho V_0^2}\frac{d^2 m_x}{dt^2}$ bevatten.)

De componenten der magnetiseerende kracht eindelijk, die door den bewegingstoestand (B) in eenig punt der holte wordt uitgeoefend, zijn

$$0, \qquad \beta \cdot \frac{4}{3}\pi A \frac{z}{\varrho^3}\frac{d m_x}{dt}, \qquad -\beta \cdot \frac{4}{3}\pi A \cdot \frac{y}{\varrho^3}\frac{d m_x}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

§ 15. Uit het thans gevondene blijkt, dat ter onderhouding van de bewegingen (A) en (B) in het middelpunt P der holte het moment

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) m_x$$

en het stroomelement

$$(2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3}\pi \frac{d m_x}{dt}$$

moeten geplaatst worden. De formules (A) en (B) zullen dus de door de molecule P opgewekte bewegingen voorstellen, wanneer de zooeven aangegeven uitdrukkingen gelijk zijn aan het moment m_x en het stroomelement $\frac{d m_x}{dt}$, die werkelijk in het deeltje bestaan. Derhalve moet

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) = 1 \quad \text{en} \quad (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3}\pi = 1$$

zijn. Aan deze vergelijkingen wordt voldaan door

$$\alpha = \frac{1 + 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\left(1 + \frac{8}{3}\pi\varepsilon_0\right)}, \qquad \beta = -\frac{1}{4\pi\left(1 + \frac{8}{3}\pi\varepsilon_0\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

en hiermede zijn de electrische bewegingen, die zich van de molecule P uit in den aether voortplanten, geheel bekend *.

---

* Laat men ε_0 tot 0 naderen, dan moet natuurlijk hetzelfde ook met de componenten der diëlectrische polarisatie in den aether het geval zijn. Toch naderen dan volgens (36) α en β niet tot 0. Maar voor $\varepsilon_0 = 0$ wordt $V_0 = \mathrm{V}_0 = \infty$ en dus in de formules (A) en (B) $f_1\left(t - \frac{r}{V_0}\right) =$

§ 16. Wij gaan thans over tot het geval (§ 3), dat in den aether een aantal holten bestaan en dat in het middelpunt van elke daarvan een deeltje met een electrisch moment (m_x, m_y, m_z) bestaat. De grootheden m_x, m_y, m_z zijn daarbij als afhankelijk van den tijd en van de plaats van het deeltje te beschouwen.

Elk deeltje zal nu weer, op de boven onderzochte wijze electrische bewegingen in den aether opwekken, maar deze bewegingen zullen zich nu niet meer ongestoord voortplanten, maar herhaaldelijk door de grensvlakken der holten worden teruggekaatst. Wij zullen intusschen in de volgende §§ aantoonen, dat men, wanneer de holten zeer klein zijn, de totale beweging in den aether op de volgende eenvoudige wijze kan verkrijgen.

Men stelle zich voor, dat bij het moment m_x van eenig deeltje P bewegingen in den aether behooren, die nog steeds door de vergelijkingen (A) en (B) bepaald worden. Eveneens verbeelde men zich, dat bij de momenten m_y en m_z van dit deeltje bewegingen behooren, die geheel met de zooeven genoemde overeenkomen, zoodat in de uitdrukkingen daarvoor dezelfde constanten α en β optreden. Zij P de geheele bewegingstoestand, die aldus bij het deeltje P behoort. Om den totalen bewegingstoestand Q in den aether te verkrijgen heeft men dan slechts aan te nemen, dat bij *elke* molecule bewegingen behooren, die met P overeenkomen, en dat de constanten α en β voor alle deeltjes dezelfde waarden hebben.

Hierbij valt op te merken, dat de bewegingen P in den aether, die bij eenig deeltje behooren, nu niet meer geheel door dat deeltje worden *opgewekt*, maar dat daaronder ook bewegingen begrepen zijn, die, van de andere moleculen afkomstig, door het grensvlak der holte, waarin 't beschouwde deeltje ligt, zijn teruggekaatst. Het gevolg daarvan zal dan ook zijn, dat de constanten α en β thans andere waarden dan (36) aannemen.

§ 17. Om nu de momenten en stroomelementen te vinden, die ter onderhouding van den bewegingstoestand Q noodig zijn, en om tevens de terugwerking van Q op de moleculen te leeren kennen, verbeelden wij ons vooreerst de bewe-

---

$f_1\left(t-\frac{r}{V_0}\right)=f_1(t)$. Verder is dan $\angle\left[\frac{1}{r}f_1(t)\right]=0$, zoodat men voor de waarde van ξ in (A) ook kan schrijven $\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{r}f_1(t)\right]$. Voegt men nu de waarden (A) en (B) bij elkaâr, dan komt er

$$\xi=(\alpha+\beta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{r}f_1(t)\right],\qquad \eta=(\alpha+\beta)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{1}{r}f_1(t)\right],\qquad \zeta=(\alpha+\beta)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left[\frac{1}{r}f_1(t)\right]$$

en voor $r_0=0$ verdwijnt ook de hier voorkomende factor $\alpha+\beta$.

gingen P, die bij eene molecule P behooren, uitgestrekt over de geheele ruimte buiten de holte, waarin dit deeltje ligt. Om dan deze bewegingen te onderhouden, is, zooals uit het in § 15 gezegde is af te leiden, in P een electrisch moment noodig met de componenten

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x, \quad (\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_y, \quad (\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_z \quad . \; . \quad (37)$$

en een stroomelement met de componenten

$$(2\alpha-\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\partial m_x}{\partial t}, \quad (2\alpha-\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\partial m_y}{\partial t}, \quad (2\alpha-\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\partial m_z}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Zijn werkelijk dit moment en stroomelement in P aanwezig, dan zijn de componenten der electromotorische en magnetiseerende kracht in eenig punt van den aether resp. $\frac{\xi_p}{\varepsilon_0}, \frac{\eta_p}{\varepsilon_0}, \frac{\zeta_p}{\varepsilon_0}, \frac{\lambda_p}{\vartheta_0}, \frac{\mu_p}{\vartheta_0}, \frac{\nu_p}{\vartheta_0}$, waarbij de index p aanwijst, dat wij met de bewegingen P te doen hebben.

Verder vindt men uit §§ 13 en 14 voor de componenten der electromotorische en magnetiseerende kracht, die tengevolge van de bewegingen P in eenig punt der holte werken, resp.

$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{m_x}{\varrho^3}, \quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{m_y}{\varrho^3}, \quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{m_z}{\varrho^3} \quad . \; . \; . \; . \quad (39)$$

en

$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi A\cdot\frac{1}{\varrho^3}\left(y\frac{\partial m_z}{\partial t}-z\frac{\partial m_y}{\partial t}\right), \quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi A\cdot\frac{1}{\varrho^3}\left(z\frac{\partial m_x}{\partial t}-x\frac{\partial m_z}{\partial t}\right),$$
$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi A\cdot\frac{1}{\varrho^3}\left(x\frac{\partial m_y}{\partial t}-y\frac{\partial m_x}{\partial t}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

§ 18. Laat nu al de bewegingen P, bij de verschillende deeltjes behoorende, te gelijk bestaan en nemen wij vooreerst nog aan, dat de bij elk deeltje behoorende beweging over de geheele ruimte buiten den bol S, waarin het ligt, is uitgestrekt. Dan hebben wij ook binnen elken bol S nog een diëlectrische en een magnetische polarisatie, waarvan de componenten, die wij ξ', η', ζ', λ', μ', ν' zullen noemen, verkregen worden door $\Sigma\,\xi_p$, $\Sigma\,\eta_p$, $\Sigma\,\zeta_p$, $\Sigma\,\lambda_p$, $\Sigma\,\mu_p$, $\Sigma\,\nu_p$ te nemen over de bewegingen P, die afkomstig zijn van al de deeltjes, met uitzondering van het in den beschouwden bol zelf geplaatste.

Om nu al de bewegingen P te onderhouden, zijn in het middelpunt van elken

bol het electrisch moment (37) en het stroomelement (38) noodig. Wanneer deze werkelijk bestaan, is het verder niet moeilijk de electromotorische en magnetiseerende kracht aan te geven, die binnen eenigen bol S werken. De eerste kracht bestaat uit het deel (39), afkomstig van de bewegingen P, die bij het in S zelf geplaatste deeltje behooren en uit een tweede deel met de componenten $\frac{\xi'}{\varepsilon_0}$, $\frac{\eta'}{\varepsilon_0}$, $\frac{\zeta'}{\varepsilon_0}$, dat afkomstig is van de bewegingen, die bij de overige trillingsmiddelpunten behooren, en van de in die punten geplaatste momenten en stroomelementen (37) en (38). De componenten der electromotorische kracht, die uit deze oorzaken te zamen voortvloeit, zijn dus

$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{m_x}{\varrho^3}+\frac{\xi'}{\varepsilon_0},\quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{m_y}{\varrho^3}+\frac{\eta'}{\varepsilon_0},\quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{m_z}{\varrho^3}+\frac{\zeta'}{\varepsilon_0}\ \ldots \quad (41)$$

Evenzoo vindt men voor die der magnetiseerende kracht

$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi A\cdot\frac{1}{\varrho^3}\left(y\frac{\partial m_z}{\partial t}-z\frac{\partial m_y}{\partial t}\right)+\frac{\lambda'}{\vartheta_0},\qquad (\alpha+\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi A\cdot\frac{1}{\varrho^3}\left(z\frac{\partial m_x}{\partial t}-x\frac{\partial m_z}{\partial t}\right)+\frac{\mu'}{\vartheta_0},$$

$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi A\cdot\frac{1}{\varrho^3}\left(x\frac{\partial m_y}{\partial t}-y\frac{\partial m_x}{\partial t}\right)+\frac{\nu'}{\vartheta_0}.\ \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

§ 19. Om eindelijk den bewegingstoestand Q (§ 16) te verkrijgen heeft men nog slechts de binnen de bollen S voorkomende diëlectrische en magnetische polarisatie (ξ', η', ζ'), (λ', μ', ν') weg te laten.

Zooals ons later zal blijken mag men aan de componenten daarvan over de geheele uitgestrektheid van eenigen bol S dezelfde waarden toekennen. Het gevolg daarvan is, dat men gemakkelijk voor de binnen S voorkomende diëlectrische polarisatie, stroomverdeeling $\left(\frac{\partial\xi'}{\partial t}, \frac{\partial\eta'}{\partial t}, \frac{\partial\zeta'}{\partial t}\right)$ en magnetische polarisatie de grootheden φ, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, enz. kan berekenen, waaruit men dan, zoo voor een uitwendig als voor een inwendig punt de door den bol uitgeoefende electromotorische en magnetiseerende kracht kan afleiden. Men vindt op deze wijze, dat de werking, door den bol naar buiten uitgeoefend, ook zou kunnen verkregen worden, wanneer slechts in het middelpunt een electrisch moment m', een stroomelement s' en een magnetisch moment $\mathfrak{m}'$ geplaatst waren. De componenten dezer drie grootheden zijn resp.

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3\xi'+\frac{2}{15}(1-k)\pi\varrho^5 A^2\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2},\qquad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\eta'+\frac{2}{15}(1-k)\pi\varrho^5 A^2\frac{\partial^2\eta'}{\partial t^2},$$

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3\zeta'+\frac{2}{15}(1-k)\pi\varrho^5 A^2\frac{\partial^2\zeta'}{\partial t^2}\ \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

$$\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\frac{\partial\,\xi'}{\partial\,t},\quad \frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\frac{\partial\,\eta'}{\partial\,t},\quad \frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\frac{\partial\,\zeta'}{\partial\,t},$$

$$\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\lambda',\qquad \frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\mu',\qquad \frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\nu',$$

waarbij nog valt op te merken, dat men, wegens de kleine waarde van ϱ (verg. § 12) voor (43) ook eenvoudig de grootheden

$$\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\xi',\qquad \frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\eta',\qquad \frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\zeta'$$

mag stellen.

Wanneer wij thans den hier beschouwden bewegingstoestand binnen de bollen S weglaten, maar tevens in het middelpunt van elken bol de momenten m', $\mathfrak{m}'$ en het stroomelement s' plaatsen, dan ondergaan de electromotorische en de magnetiseerende kracht, die in eenig punt van den aether werken, geen verandering. Voegt men derhalve bij m' en s' nog de grootheden (37) en (38), dan kent men voor elke holte het electrische moment, het stroomelement en het magnetische moment, die in het middelpunt geplaatst moeten worden, om den bewegingstoestand Q te onderhouden. Zal dan deze laatste kunnen bestaan, dan moeten de aldus berekende grootheden gelijk zijn aan het electrische moment $(m_x,\ m_y,\ m_z)$, het stroomelement $\left(\frac{\partial m_x}{\partial t},\ \frac{\partial m_y}{\partial t},\ \frac{\partial m_z}{\partial t}\right)$ en het magnetische moment $(\mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z)$, die *werkelijk* in het middelpunt aanwezig zijn. Dit is het geval, wanneer voor *elk* deeltje

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x+\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\xi' &= m_x,\\
(\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_y+\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\eta' &= m_y,\\
(\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_z+\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\zeta' &= m_z,
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned}
(2\,\alpha-\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi\,\frac{\partial\,m_x}{\partial\,t}+\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\frac{\partial\,\xi'}{\partial\,t} &= \frac{\partial\,m_x}{\partial\,t},\\
(2\,\alpha-\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi\,\frac{\partial\,m_y}{\partial\,t}+\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\frac{\partial\,\eta'}{\partial\,t} &= \frac{\partial\,m_y}{\partial\,t},\\
(2\,\alpha-\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi\,\frac{\partial\,m_z}{\partial\,t}+\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3\,\frac{\partial\,\zeta'}{\partial\,t} &= \frac{\partial\,m_z}{\partial\,t},
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta)$$

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3\lambda' = \mathfrak{m}_x, \qquad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\mu' = \mathfrak{m}_y, \qquad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\nu' = \mathfrak{m}_z \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

is.

§ 20. Beschouwen wij ten slotte nog de electromotorische en de magnetiseerende kracht (X', Y', Z') en (L', M', N'), die binnen eenige holte S door al, wat er buiten ligt, worden uitgeoefend. Wanneer wij vooreerst den bewegingstoestand $(\xi', \eta', \zeta', \lambda', \mu', \nu')$ binnen alle bollen, behalve den beschouwden, door de in de vorige § aangegeven electrische en magnetische momenten en stroomelementen in de middelpunten vervangen, dan heeft dit op de in § 18 beschouwde electromotorische en magnetiseerende kracht binnen S geen invloed. Bovendien hebben wij dan, tengevolge van (α), (β) en (44) den invloed door de werkelijk in die bollen geplaatste momenten en stroomelementen uitgeoefend, behoorlijk in rekening gebracht. Om derhalve de krachten (X', Y', Z'), (L', M', N') te verkrijgen hebben wij nog slechts van (41) en (42) de electromotorische en de magnetiseerende kracht (X'', Y'', Z'') en (L'', M'', N'') af te trekken, die door den bewegingstoestand $(\xi', \eta', \zeta', \lambda', \mu', \nu')$ binnen den beschouwden bol zelf voorkomende, worden uitgeoefend.

§ 21. Nu vindt men op de in § 19 aangegeven wijze

$$X'' = -\frac{4}{3}\pi\xi' + \frac{}{3}\pi A^2(r^2 - 3\varrho^2)\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} + \frac{2}{15}(k-1)\pi A^2\Big[(r^2 - 5\varrho^2)\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} +$$
$$+ 2x\left(x\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} + y\frac{\partial^2\eta'}{\partial t^2} + z\frac{\partial^2\zeta'}{\partial t^2}\right)\Big] + \frac{4}{3}\pi A\left(z\frac{\partial\mu'}{\partial t} - y\frac{\partial\nu'}{\partial t}\right).$$

Daar ϱ en dus ook r, x, y, z zeer klein zijn (verg. § 12) mag men echter van de vier termen, waaruit X'' bestaat, den tweeden en den derden ten opzichte van den eersten verwaarloozen, zoodat

$$X'' = -\frac{4}{3}\pi\xi' + \frac{4}{3}\pi A\left(z\frac{\partial\mu'}{\partial t} - y\frac{\partial\nu'}{\partial t}\right)$$

en eveneens

$$Y'' = -\frac{4}{3}\pi\eta' + \frac{4}{3}\pi A\left(x\frac{\partial\nu'}{\partial t} - z\frac{\partial\lambda'}{\partial t}\right), \quad Z'' = -\frac{4}{3}\pi\zeta' + \frac{4}{3}\pi A\left(y\frac{\partial\lambda'}{\partial t} - x\frac{\partial\mu'}{\partial t}\right)$$

wordt. Verder vindt men

$$L'' = -\frac{4}{3}\pi\lambda' + \frac{4}{3}\pi A\left(y\frac{\partial\zeta'}{\partial t} - z\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right), \quad M'' = -\frac{4}{3}\pi\mu' + \frac{4}{3}\pi A\left(z\frac{\partial\xi'}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta'}{\partial t}\right),$$
$$N'' = -\frac{4}{3}\pi\nu' + \frac{4}{3}\pi A\left(x\frac{\partial\eta'}{\partial t} - y\frac{\partial\xi'}{\partial t}\right),$$

en volgens het in de vorige § gezegde wordt eindelijk

$$X' = (\alpha + \beta) . \frac{8}{3} \pi \frac{m_x}{\rho^3} + \frac{\xi'}{\varepsilon_0} + \frac{4}{3} \pi \xi' - \frac{4}{3} \pi A \left(z \frac{\partial \mu'}{\partial t} - y \frac{\partial \nu'}{\partial t} \right), \text{ enz.} \quad \ldots . (45)$$

$$L' = \frac{\lambda'}{\vartheta_0} + \frac{4}{3} \pi \lambda' + (\alpha + \beta) . \frac{4}{3} \pi A \frac{1}{\rho^3} \left(y \frac{\partial m_z}{\partial t} - z \frac{\partial m_y}{\partial t} \right) - \frac{4}{3} \pi A \left(y \frac{\partial \zeta'}{\partial t} - z \frac{\partial \eta'}{\partial t} \right), \text{ enz.} \quad . (46)$$

In het middelpunt der holte (voor $x = y = z = 0$) worden deze uitdrukkingen

$$X'_p = (\alpha + \beta) . \frac{8}{3} \pi \frac{m_x}{\rho^3} + \frac{\xi'}{\varepsilon_0} + \frac{4}{3} \pi \xi', \text{ enz.}$$

$$L'_p = \frac{\lambda'}{\vartheta_0} + \frac{4}{3} \pi \lambda', \text{ enz.}$$

§ 22. Nu wij aldus de electromotorische en de magnetiseerende kracht gevonden hebben, die tengevolge van de beschouwde electrische bewegingen op een der in 't middelpunt der holten geplaatste deeltjes werkt, kunnen wij de laatste vergelijkingen opstellen, waaraan de beschouwde bewegingen voldoen moeten. Blijkens het in §§ 2 en 3 gezegde moet nl. voor elk deeltje

$$\left.\begin{aligned} \varkappa \left[(\alpha + \beta) . \frac{8}{3} \pi \frac{m_x}{\rho^3} + \frac{\xi'}{\varepsilon_0} + \frac{4}{3} \pi \xi' \right] &= m_x, \\ \varkappa \left[(\alpha + \beta) . \frac{8}{3} \pi \frac{m_y}{\rho^3} + \frac{\eta'}{\varepsilon_0} + \frac{4}{3} \pi \eta' \right] &= m_y, \\ \varkappa \left[(\alpha + \beta) . \frac{8}{3} \pi \frac{m_z}{\rho^3} + \frac{\zeta'}{\varepsilon_0} + \frac{4}{3} \pi \zeta' \right] &= m_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots . (\gamma)$$

en

$$\frac{\frac{4}{3} \pi \rho^3 \vartheta_0}{1 + \frac{4}{3} \pi \vartheta_0} \left(\frac{\lambda'}{\vartheta_0} + \frac{4}{3} \pi \lambda' \right) = \mathfrak{m}_x, \qquad \frac{\frac{4}{3} \pi \rho^3 \vartheta_0}{1 + \frac{4}{3} \pi \vartheta_0} \left(\frac{\mu'}{\vartheta_0} + \frac{4}{3} \pi \mu' \right) = \mathfrak{m}_y,$$

$$\frac{\frac{4}{3} \pi \rho^3 \vartheta_0}{1 + \frac{4}{3} \pi \vartheta_0} \left(\frac{\nu'}{\vartheta_0} + \frac{4}{3} \pi \nu' \right) = \mathfrak{m}_z . \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (47)$$

zijn.

De laatste vergelijkingen drukken echter dezelfde voorwaarde uit als (44). Daaruit volgt, dat aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldaan wordt, wanneer men slechts m_x, m_y, m_z zoodanig als functiën van de coördinaten en den tijd en α en β als constanten bepalen kan, dat aan (α), (β) en (γ) voldaan is. Immers, dan zijn door middel van de vergelijkingen (A) en (B) en de andere daarbij behoorende ook λ', μ', ν' bekend en (44) en (47) leveren dan dezelfde waarden van m_x, m_y, m_z op.

§ 23. Wij zullen nu bewijzen, dat aan de vergelijkingen (α), (β), (γ) werkelijk voldaan kan worden, wanneer zich in het stelsel moleculen transversale electrische trillingen voortplanten. Daaronder verstaan wij in het algemeen elken bewegingstoestand, die voldoet aan de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial m_y}{\partial y} + \dfrac{\partial m_z}{\partial z} = 0, \\ \Delta m_x = \dfrac{1}{V^2} \dfrac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}, \qquad \Delta m_y = \dfrac{1}{V^2} \dfrac{\partial^2 m_y}{\partial t^2}, \qquad \Delta m_z = \dfrac{1}{V^2} \dfrac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

Hierbij hebben wij ons den oorsprong der coördinaten in een willekeurig gekozen punt voor te stellen, terwijl V de voorloopig onbekende voortplantingssnelheid der transversale trillingen is.

Zij

$$m_x = f_1(x, y, z, t), \qquad m_y = f_2(x, y, z, t), \qquad m_z = f_3(x, y, z, t) \ldots\ldots (48)$$

eenig stel waarden, dat aan de vergelijkingen (C) voldoet, waarbij wij zullen aannemen, dat f_1, f_2, f_3 doorloopende functiën zijn, die of alleen op eindigen afstand een van 0 verschillende waarde hebben, of althans bij toenemenden afstand zeer snel afnemen. Trachten wij dan de waarden van ξ', η', ζ' te berekenen binnen eenige holte S, waarvan 't middelpunt P de coördinaten x', y', z' heeft en noemen wij daarbij ξ_1', η_1', ζ_1' de waarden, die men verkrijgt, door alleen de transversale trillingen in rekening te brengen, die in den aether worden opgewekt, evenzoo ξ_2', η_2', ζ_2' de waarden, die uit de longitudinale trillingen voortvloeien.

Wij zullen bij deze berekening nog aannemen, dat bij den overgang van molecule tot molecule de electrische momenten m_x, m_y, m_z slechts uiterst langzaam veranderen, hetgeen klaarblijkelijk bij de lichtbeweging het geval zal zijn, *wanneer de golflengte l, vergeleken met den onderlingen afstand der deeltjes, zeer groot is.* Men kan dan om het punt P als middelpunt een bol B met een straal R beschrijven, die zeer groot is vergeleken met den onderlingen afstand der deel-

tjes, maar toch zoo klein, dat voor de binnen B gelegen moleculen de momenten m_x, m_y, m_z slechts zeer weinig van die van het deeltje P verschillen. De grootheid ξ_1' bestaat dan uit twee deelen, waarvan het eene $\xi_1'{}_{(a)}$ afkomstig is van de buiten B, het andere $\xi_1'{}_{(b)}$ van de daarbinnen gelegen moleculen. Hetzelfde geldt van η_1', ζ_1', ξ_2', η_2', ζ_2'.

§ 24. Om nu vooreerst $\xi_1'{}_{(a)}$ te berekenen merken wij op, dat de straal ϱ der holte S zeer klein is ten opzichte van den afstand van P tot alle buiten B gelegen deeltjes, zoodat wij $\xi_1'{}_{(a)}$ over de geheele uitgestrektheid van S even groot kunnen stellen en dus slechts de waarde in het middelpunt P (x', y', z') hebben te zoeken.

Is dan Q eene molecule, die op een afstand r van P in het punt (x, y, z) ligt, dan vindt men door middel van de formules (A) het aandeel, dat het moment m_x dezer molecule voor $\xi_1'{}_{(a)}$, $\eta_1'{}_{(a)}$, $\zeta_1'{}_{(a)}$ oplevert. Door letterverwisseling worden ook de aandeelen gevonden, die bij de momenten m_y, m_z van Q behooren en men verkrijgt aldus voor het deel van $\xi_1'{}_{(a)}$, dat bij het deeltje Q behoort,

$$\xi_1'{}_{(q)} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{1}{r} f_2 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{1}{r} f_3 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \right\} - \alpha \Delta' \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \ldots \ldots \quad (49)$$

Hierbij is $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$, terwijl wij $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ zullen stellen.

Om nu uit (49) $\xi_1'{}_{(a)}$, $\eta_1'{}_{(a)}$, $\zeta_1'{}_{(a)}$ af te leiden moet men over al de buiten B gelegen moleculen Q sommeeren. In plaats daarvan kan men echter ook over de ruimte A buiten B integreeren. Men kan nl. deze ruimte in een aantal even groote geheel gesloten vakken verdeelen; zoodat in elk daarvan eene molecule ligt. De inhoud van elk vak is dan $\frac{1}{p}$, als p het aantal deeltjes in de ruimte-eenheid voorstelt. Verder mag men, tengevolge van het in § 23 gezegde, de functiën f_1, f_2, f_3, r over de geheele uitgestrektheid van eenig vak als constant beschouwen, zoodat hetzelfde ook met de functie F het geval is, die het tweede lid van (49) uitmaakt. Daaruit volgt, dat men door over eenig vak de integraal $p\iiint F\, d\tau$ te nemen ($d\tau = dx\, dy\, dz$) juist de grootheid $\xi_1'{}_{(q)}$ voor de in dat vak geplaatste molecule verkrijgt. Daar hetzelfde ook voor de andere vakken

geldt, verkrijgt men voor $\xi_{1(A)} = p\iiint_{(A)} F\,d\tau$, waarbij de index (A) aanwijst, dat de integraal over de geheele ruimte A buiten den bol B moet genomen worden. Derhalve is

$$\xi_{1(A)} = \alpha p \frac{\partial}{\partial x'} \iiint_{(A)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t-\frac{r}{V_0}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{r} f_2\left(x, y, z, t-\frac{r}{V_0}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r} f_3\left(x, y, z, t-\frac{r}{V_0}\right)\right]\right\} d\tau - \alpha p \iiint_{(A)} \Delta\left[\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t-\frac{r}{V_0}\right)\right] d\tau = \alpha p \frac{\partial I_1}{\partial x'} - \alpha p I_2 . \; . \; (50)$$

§ 25. Om I_1 te vinden kan men van de volgende beschouwing gebruik maken. In de grootheid $\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t-\frac{r}{V_0}\right)$ komt x op twee wijzen voor, nl. vooreerst in r en ten tweede daarbuiten. Wanneer wij nu onder $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r} f_1\right]$ het werkelijke differentiaalquotient naar x verstaan, onder $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right]$ daarentegen het differentiaalquotient, dat men verkrijgt, door r als standvastig te beschouwen, dan is

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] - \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{r} f_1\right], \; . \; . \; . \; . \; . \; (51)$$

dus

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r} f_1\right].$$

Men vermenigvuldige deze vergelijking met $d\tau$ en integreere over de ruimte A. Daarbij kan men in de laatste integraal van het tweede lid de integratie naar x uitvoeren, zoodat deze term (daar $\frac{1}{r} f_1$ op oneindigen afstand verdwijnt) slechts een integraal over het boloppervlak B oplevert. Wanneer a', b', c' de richtingsconstanten zijn der aan dit oppervlak naar buiten getrokken normaal, dan vindt men op deze wijze

$$\iiint_{(A)} \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{r} f_1\right] d\tau = \iiint_{(A)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] d\tau + \iint a' \cdot \frac{1}{r} f_1 \cdot dB.$$

Even als wij hier een vergelijking gevonden hebben voor het eerste deel van I_1

kunnen wij ook met het tweede en derde deel te werk gaan en wij verkrijgen dan door optelling

$$I_1 = \iiint_{(A)} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{1}{r} f_2\right] + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{1}{r} f_3\right] \right\} d\tau + \iint \frac{1}{r}(a' f_1 + b' f_2 + c' f_3)\, dB \,.\,. \quad (52)$$

Nu is echter bij de eerste integraal de functie onder het integraalteeken niet anders dan de waarde, die $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right)$ voor den tijd $t - \frac{r}{V_0}$ aanneemt, en daar nu de eerste der vergelijkingen (C) overal en ten allen tijde moet gelden, is de eerste integraal in (52) = 0.

In de tweede integraal van die formule kan men wegens de kleine waarde van den straal R van B de functiën $f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$, $f_2\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$, $f_3\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$ in reeksen naar de opklimmende machten van $\frac{r}{V_0}$ ontwikkelen. Uit het theorema van TAYLOR volgt b. v.

$$f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right) = m_x - \frac{r}{V_0}\frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{r^2}{2 V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} - \text{enz},$$

dus

$$\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right) = \frac{1}{r} m_x - \frac{1}{V_0}\frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{r}{2 V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} - \text{enz.}$$

Op deze wijze verkrijgt men

$$\frac{\partial I_1}{\partial x'} = \iint \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'}(a' m_x + b' m_y + c' m_z)\, dB + \frac{1}{2 V_0^2}\iint \frac{\partial r}{\partial x}\left(a'\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + b'\frac{\partial^2 m_y}{\partial t^2} + c'\frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2}\right) dB \text{ enz.} \,.\, (53)$$

Zijn nu x, y, z de coördinaten van eenig punt van het boloppervlak ten opzichte van assen, door P evenwijdig aan de oorspronkelijke gebracht, en duiden wij de waarden in P door den index p aan, dan is in (53)

$$m_x = (m_x)_p + \text{x}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}\right)_p + \text{y}\left(\frac{\partial m_x}{\partial y}\right)_p + \text{z}\left(\frac{\partial m_x}{\partial z}\right)_p + \text{enz.},$$

terwijl men ook m_y, m_z in dergelijke reeksen kan ontwikkelen. Bij de integratie verdwijnen nu de termen met de eerste differentiaalquotienten van

m_x, m_y, m_z. Wegens het in § 23 over R gezegde mag men ook de termen met de tweede differentiaalquotienten verwaarloozen. Bij enkelvoudige lichttrillingen zijn nl. die termen van de orde $\left(\frac{R}{l}\right)^2$ ten opzichte van die, welke $(m_x)_p$ enz. zelf bevatten. Ten slotte wordt dus, daar $a' = \frac{\mathrm{x}}{R}$, $b' = \frac{\mathrm{y}}{R}$, $c' = \frac{\mathrm{z}}{R}$ en, in het middelpunt P, $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} = \frac{\mathrm{x}}{R^3}$ is,

$$\frac{\partial I_1}{\partial x'} = \frac{1}{R^4}\left\{(m_x)_p\iint \mathrm{x}^2\, d B + (m_y)_p\iint \mathrm{x\,y}\, d B + (m_z)_p\iint \mathrm{x\,z}\, d B\right\},$$

of

$$\frac{\partial I_1}{\partial x'} = \frac{4}{3}\pi\,(m_x)_p. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

§ 26. De integraal I_2 in (50) kan men op twee wijzen transformeeren. Vooreerst kan men op $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)\right]$ dezelfde redeneering toepassen, die wij boven voor $\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$ bezigden. Men verkrijgt daardoor

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] - \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right],$$

terwijl men, door (51) naar x' te differentieeren, de betrekking

$$\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial x}\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left[\frac{1}{r} f_1\right]$$

vindt. Telt men beide vergelijkingen bij elkaâr op, dan komt er na omzetting

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{r} f_1\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] + \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{r} f_1\right]\right\}$$

en hieruit volgt

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{r} f_1\right] d\tau = \iiint_{\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\frac{1}{r} f_1\right] d\tau + \iint a'\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x'}\right\}\left[\frac{1}{r} f_1\right] d B.$$

Op dezelfde wijze kan men nog twee vergelijkingen opstellen, waarbij in plaats van de differentiaalquotienten naar x en x' resp. die naar y en y', z en z' voorkomen. Telt men vervolgens de drie verkregen vergelijkingen bij elkaâr op, dan komt er in 't eerste lid juist I_2; men heeft dus

$$I_2 = \iiint_{(A)} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \right\} \left[\frac{1}{r} f_1\right] d\tau +$$

$$+ \iint \left\{ a'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + b'\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \right\} \left[\frac{1}{r} f_1\right] dB + \iint \left\{ a'\frac{\partial}{\partial x'} + b'\frac{\partial}{\partial y'} + c'\frac{\partial}{\partial z'} \right\} \left[\frac{1}{r} f_1\right] dB^{*}. \quad (55)$$

In de eerste integraal is de functie onder het integraalteeken voor eenig punt Q klaarblijkelijk niets anders als de waarde, die $\frac{1}{r} \Delta m_x$ voor den tijd $t - \frac{r}{V_0}$ in dat punt aanneemt. Men mag er dus blijkens (C) de waarde voor stellen, die $\frac{1}{r V^2} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}$ in dat punt op hetzelfde oogenblik heeft en deze is $\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)\right]$, zoodat de eerste integraal in (55)

$$\frac{1}{V^2} \iiint_{(A)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)\right] d\tau$$

wordt.

Bij de berekening van de beide laatste integralen in (55) kan men op een dergelijke wijze te werk gaan als bij de behandeling der in de vorige § voorkomende integraal over het boloppervlak B. Het blijkt dan, dat men in de laatste integraal van (55) voor f_1 $(m_x)_p$ in de plaats mag stellen, zoodat deze integraal den vorm

$$(m_x)_p \iint \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} a' + \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} b' + \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} c' \right\} dB$$

aanneemt. Deze grootheid is echter $= 4\pi (m_x)_p$. Eindelijk kan men aantoonen,

---

* In het bijzondere geval, dat $f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$ als een product van twee factoren kan worden voorgesteld, waarvan de eene slechts x, y, z, de andere slechts $t - \frac{r}{V_0}$ bevat, gaat de vergelijking (55) in een vorm over, dien men ook uit het theorema van GREEN kan afleiden. De bewerking, waardoor wij (51) verkregen, verandert dan in de gewone partieele integratie.

dat de eerste der in (55) voorkomende integralen over het boloppervlak ten opzichte hiervan kan verwaarloosd worden, zoodat men voor (55) verkrijgt

$$I_2 = \frac{1}{V^2} \iiint_{(A)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)\right] d\tau + 4\pi (m_x)_p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Men kan in de tweede plaats I_2 transformeeren door middel van de vergelijking

$$\Delta' \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)\right] = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)\right]$$

(verg. de formules (8) en (9)). Hierdoor wordt

$$I_2 = \frac{1}{V_0^2} \iiint_{(A)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)\right]$$

en men kan deze vergelijking bezigen om uit (56) de nog voorkomende integraal te doen verdwijnen. Dan wordt

$$I_2 = - \frac{4\pi (m_x)_p}{\frac{V_0^2}{V^2} - 1} = - \frac{4\pi (m_x)_p}{n^2 - 1},$$

waarbij $n = \frac{V_0}{V}$ den absoluten brekingsindex van het medium voorstelt. Substitueert men eindelijk de voor I_2 en $\frac{\partial I_1}{\partial x'}$ gevonden waarden in (50), dan verkrijgt men

$$\xi_1'{}_{(a)} = \alpha \cdot \frac{4}{3} \pi p (m_x)_p + \alpha \cdot \frac{4\pi p (m_x)_p}{n^2 - 1} = \alpha \cdot \frac{4}{3} \pi p (m_x)_p \cdot \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1}. \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

§ 27. Beschouwen wij thans de grootheid $\xi_1'{}_{(b)}$, die afkomstig is van de binnen den bol B gelegen deeltjes. Daarbij valt op te merken, dat als Q een dezer deeltjes is, de straal ϱ der holte S (§ 23) misschien niet meer mag verwaarloosd worden ten opzichte van den afstand PQ. Het gevolg daarvan is, dat de waarde van het aandeel $\xi_1'{}_{(q)}$, dat Q voor $\xi_1'{}_{(b)}$ oplevert, niet meer over de geheele uitgestrektheid van S dezelfde is. Zoolang intusschen ϱ niet al te groot is, zal men voor eenig punt P' binnen de holte kunnen stellen

$$\xi_1'{}_{(q)} = \left[\xi_1'{}_{(q)}\right]_p + x' \left[\frac{\partial}{\partial x'} \xi_1'{}_{(q)}\right]_p + y' \left[\frac{\partial}{\partial y'} \xi_1'{}_{(q)}\right]_p + z' \left[\frac{\partial}{\partial z'} \xi_1'{}_{(q)}\right]_p + \text{enz.},$$

waarbij de index p de waarden in P aanduidt, terwijl x', y', z' de coördinaten zijn van P' ten opzichte van assen, door P evenwijdig aan de oorspronkelijke gebracht. Blijkens (49) is dus

$$\frac{\xi_1'(q)}{\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left[\frac{1}{r} f_1\right] + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'}\left[\frac{1}{r} f_2\right] + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'}\left[\frac{1}{r} f_3\right] - \Delta'\left[\frac{1}{r} f_1\right] +$$

$$+ x' \frac{\partial^3}{\partial x'^3}\left[\frac{1}{r} f_1\right] + x' \frac{\partial^3}{\partial x'^2 \partial y'}\left[\frac{1}{r} f_2\right] + x' \frac{\partial^3}{\partial x'^2 \partial z'}\left[\frac{1}{r} f_3\right] - x' \frac{\partial}{\partial x'} \Delta'\left[\frac{1}{r} f_1\right] + \text{enz.}, \;.\;. \;(58)$$

waarbij voor alle differentiaalquotienten de waarde in P moet genomen worden.

Deze uitdrukking moet men dan verder sommeeren over al de moleculen Q, die binnen B liggen. Hierbij kan men nu op $\frac{1}{r} f_1$, $\frac{1}{r} f_2$, $\frac{1}{r} f_3$ dezelfde ontwikkeling als in § 25 toepassen en het blijkt dan, dat men, als in de uitkomst termen verwaarloosd worden, die ten opzichte van (57) van de orde $\left(\frac{R}{l}\right)^2$ zijn, in (58) voor f_1, f_2, f_3 de grootheden $(m_x)_p$, $(m_y)_p$, $(m_z)_p$ in de plaats mag stellen. Het komt er dus slechts op aan, in het algemeen de som

$$S = \Sigma \frac{\partial^{a+b+c}}{\partial x'^a \partial y'^b \partial z'^c}\left(\frac{1}{r}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(59)$$

te bepalen, waarbij a, b, c willekeurige getallen zijn. Daarbij maken wij gebruik van de omstandigheid, dat de moleculen isotroop verdeeld zijn. Is dit het geval, dan moet de grootheid S niet veranderen, wanneer men aan de assen andere richtingen geeft, of, wat op hetzelfde neêrkomt, wanneer men de assen onveranderd laat, maar aan al de deeltjes Q, met behoud van hun relatieven stand een wenteling geeft om een door P' getrokken as. Geeft men op deze wijze aan de deeltjes h verschillende standen, dan zal S ook gelijk moeten zijn aan de grootheid, die men verkrijgt door in (59) voor elk deeltje $\frac{1}{r}$ te vervangen door $\frac{1}{h} \Sigma \frac{1}{r}$, waarbij dit somteeken betrekking heeft op de verschillende standen van dit deeltje. Men neme nu h zeer groot en zorge, dat de verschillende standen van elk deeltje Q gelijkmatig over een om P als middelpunt beschreven bolopPervlak verspreid zijn. Dan gaat $\frac{1}{h} \Sigma \frac{1}{r}$ voor dat deeltje over in de potentiaalfunctie van een massa, die met overal gelijke dichtheid over het zooeven ge-

noemde boloppervlak verdeeld is. Daar nu de differentiaalquotienten dier potentiaalfunctie in P 0 zijn, is ook $S = 0$ en $\xi_1'{}_{(b)} = 0$. In (57) hebben wij derhalve de totale waarde van ξ_1'.

§ 28. Het bovenstaande onderzoek wordt eenvoudiger, wanneer men mag aannemen, dat ook voor elk deeltje Q, dat binnen B ligt, de afstand $P\,Q$ zeer groot is, vergeleken met ρ. Dan wordt nl. (58)

$$\frac{\xi_1'{}_{(q)}}{\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left[\frac{1}{r} f_1\right] + \frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial y'}\left[\frac{1}{r} f_2\right] + \frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial z'}\left[\frac{1}{r} f_3\right] - \Delta'\left[\frac{1}{r} f_1\right],$$

of, wanneer men weer voor f_1, f_2, f_3 $(m_x)_p$, $(m_y)_p$, $(m_z)_p$ stelt,

$$\frac{\xi_1'{}_{(q)}}{\alpha} = m_x\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,\mathrm{x}^2}{r^5}\right) + m_y \cdot \frac{3\,\mathrm{x\,y}}{r^5} + m_z \cdot \frac{3\,\mathrm{x\,z}}{r^5}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

waarbij x, y, z de coördinaten van Q zijn met betrekking tot de door P gebrachte assen.

Nu levert de vergelijking (60) bij het sommeeren 0 op, niet alleen, wanneer de middenstof ten opzichte van alle richtingen, maar zelfs, wanneer zij slechts met betrekking tot drie onderling loodrechte hoofdrichtingen dezelfde eigenschappen bezit, zooals dit bij de kristallen van het regelmatige stelsel het geval is. Kiest men nl. de assen evenwijdig aan de hoofdrichtingen, dan moet

$$\Sigma\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,\mathrm{x}^2}{r^5}\right) = \Sigma\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,\mathrm{y}^2}{r^5}\right) = \Sigma\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,\mathrm{z}^2}{r^5}\right)$$

en dus $= 0$ zijn, daar de som dezer drie uitdrukkingen 0 is. Dat ook $\Sigma\frac{\mathrm{x\,y}}{r^5} = \Sigma\frac{\mathrm{x\,z}}{r^5} = 0$ is behoeft wel niet nader te worden aangewezen.

Wanneer dus de afmetingen der deeltjes vergeleken met hun onderlingen afstand klein zijn, dan moeten de kristallen van het regelmatige stelsel dezelfde optische eigenschappen bezitten als de volkomen isotrope lichamen.

§ 29. Op dezelfde wijze als ξ_1' kan men ook ξ_2' berekenen. Hier is volgens de vergelijkingen (B)

$$\xi_2'{}_{(q)} = \beta\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{r} f_1\left(x,y,z,t - \frac{r}{V_0}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{r} f_2\left(x,y,z,t - \frac{r}{V_0}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{r} f_3\left(x,y,z,t - \frac{r}{V_0}\right)\right]\right\}$$

en men vindt hieruit door beschouwingen, die geheel met de in § 25 meêgedeelde overeenkomen,

$$\xi_2'{}_{(a)} = \beta \cdot \frac{1}{3}\pi\rho\,(m_x)_p,$$

terwijl weer $\xi_2{}'_{(b)} = 0$ wordt. Ten slotte is dus

$$\xi' = \xi_1{}' + \xi_2{}' = \frac{4}{3}\pi\, p\, (m_x)_p \left(\alpha\, \frac{n^2+2}{n^2-1} + \beta\right), \text{ enz.,}$$

of, wanneer men

$$\frac{4}{3}\pi\, p \left(\alpha\, \frac{n^2+2}{n^2-1} + \beta\right) = q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

stelt en den thans overtolligen index p weglaat,

$$\xi' = q\, m_x, \qquad \eta' = q\, m_y, \qquad \zeta' = q\, m_z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

§ 30. Substitueert men nu deze waarden in de vergelijkingen (α), dan volgt uit elke daarvan, wanneer men resp. door m_x, m_y, m_z deelt

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) + \frac{4}{3}\pi\, \varrho^3\, q = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

Evenzoo verkrijgt men uit (β) en (γ) de betrekkingen

$$(2\,\alpha - \beta)\,.\,\frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\, \varrho^3\, q = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

en

$$(\alpha+\beta)\,\frac{8}{3}\pi + \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \varrho^3\, q = \frac{\varrho^3}{\varkappa}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Daar wij dus drie vergelijkingen hebben tusschen α, β en q (uit welke grootheden men dan door middel van (61) n en dus V kan bepalen) kan werkelijk de onderstelde bewegingstoestand bestaan, terwijl tevens alle nog onbekende grootheden berekend kunnen worden.

Men vindt bij die berekening

$$q = \frac{\frac{8}{3}\pi\,\varepsilon_0^2\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varrho^3}\right) + \frac{\varepsilon_0}{\varkappa}}{1 + 4\,\pi\,\varepsilon_0}, \quad \alpha = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\left(1 - \frac{\varrho^3}{\varkappa}\right) + 3}{12\,\pi}, \quad \beta = -\,\frac{\alpha}{1 + 4\,\pi\,\varepsilon_0} \,.\,. (66)$$

waaruit vooreerst blijkt, daar toch ε_0 een zeer groot getal is (I, § 23), dat de amplitudo der in den aether opgewekte longitudinale trillingen vergeleken met die der transversale uiterst klein is.

Uit (61) volgt nu verder

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} - \frac{1}{1+4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\,\alpha\,p}$$

en daar nu $\frac{n^2+2}{n^2-1}$ althans grooter dan 1 is, mag men hier de breuk $\frac{1}{1+4\pi\varepsilon_0}$ verwaarloozen en dus schrijven

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\,\alpha\,p} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\,p} \cdot \frac{12\pi\left\{\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0^2\left(\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varrho^3}\right)+\frac{\varepsilon_0}{\varkappa}\right\}}{(1+4\pi\varepsilon_0)\left\{4\pi\varepsilon_0\left(1-\frac{\varrho^3}{\varkappa}\right)+3\right\}}.$$

Stelt men nog den hier voorkomenden factor $\frac{4\pi\varepsilon_0}{1+4\pi\varepsilon_0}=1$, dan wordt

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\,p} \cdot \frac{8\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varrho^3}\right)+\frac{3}{\varkappa}}{4\pi\varepsilon_0\left(1-\frac{\varrho^3}{\varkappa}\right)+3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Is nu d de dichtheid van het medium en m de massa van een der deeltjes, dan is $p=\frac{d}{\mathrm{m}}$ en uit de zoo even verkregen vergelijking volgt

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d} = \mathrm{k}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{D})$$

wanneer men kortheidshalve

$$\mathrm{k} = \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3}{\mathrm{m}} \cdot \frac{(3+4\pi\varepsilon_0)-4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{\varrho^3}{\varkappa}}{(3+8\pi\varepsilon_0)\cdot\frac{\varrho^3}{\varkappa}-8\pi\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

stelt.

Wanneer de dichtheid der stof verandert, maar de deeltjes daarbij dezelfde eigenschappen behouden, dan blijft blijkens (68) ook k onveranderd. Derhalve moet dan volgens de hier gegeven theorie het quotient $\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}$ constant blijven.

§ 31. De constante $\varkappa$, die in de verkregen formules voorkomt, moet steeds een zoodanige waarde hebben, dat $n > 1$ en dus k positief wordt.

Nu kan men voor (68) schrijven

$$k = \frac{\frac{4}{3}\pi \varrho^3}{m} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{3 + 8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{3 + 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{\varrho^3}{\varkappa}}{\frac{\varrho^3}{\varkappa} - \frac{8\pi\varepsilon_0}{3 + 8\pi\varepsilon_0}}$$

en daar nu

$$\frac{3 + 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0} > \frac{8\pi\varepsilon_0}{3 + 8\pi\varepsilon_0}$$

is, kan k slechts positief zijn, wanneer

$$\frac{3 + 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0} > \frac{\varrho^3}{\varkappa} > \frac{8\pi\varepsilon_0}{3 + 8\pi\varepsilon_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (69)$$

is en dus teller en noemer in (68) positief zijn. Daaruit volgt dan, dat wanneer $\varkappa$ toeneemt (al het overige gelijk blijvende) ook k grooter wordt.

Tengevolge van (D) is echter

$$n^2 = \frac{1 + 2kd}{1 - kd}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (70)$$

zoodat vooreerst $kd < 1$ moet zijn en bij toeneming van $\varkappa$ en k hetzelfde ook met n moet gebeuren.

Eindelijk volgt nog uit (69) en (66), dat α tusschen 0 en $\frac{3}{8\pi}$ moet liggen.

§ 32. Bij al het voorgaande werd de in § 2 gemaakte onderstelling volgehouden, dat in het middelpunt van elke holte S een enkel deeltje aanwezig is. Wij hebben thans nog aan te toonen, dat de verkregen resultaten ook doorgaan, wanneer men omtrent de stof binnen de bollen S andere onderstellingen maakt.

Men zou b.v. kunnen aannemen, dat elke holte S geheel gevuld is met een homogene stof, waarvoor de constante ε_1 der diëlectrische polarisatie een andere waarde heeft dan voor den aether, terwijl de constante der magnetische polarisatie nog steeds ϑ_0 is (verg. § 3). Wanneer nu buiten den bol S alles hetzelfde is gebleven als bij het voorgaande onderzoek, dan zijn de componenten der uitwendige electromotorische en magnetiseerende kracht, die op den bol werken,

door de formules (45) en (46) bepaald (waarbij weer het middelpunt P van S tot oorsprong van het coördinatenstelsel moet gekozen worden). Verwaarloozen wij nu vooreerst die deelen van deze krachten, die niet over de geheele uitgestrektheid van S dezelfde grootte en richting hebben, dan mogen wij voor die componenten in elk punt van S de waarden stellen, die zij in het middelpunt hebben, en die wij vroeger met X_p', Y_p', Z_p', enz. hebben aangeduid.

Veranderden nu deze grootheden niet met den tijd, dan zouden binnen den bol een diëlectrische en een magnetische polarisatie worden opgewekt met de componenten

$$\xi = \frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon_1} X_p', \qquad \eta = \frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon_1} Y_p', \qquad \zeta = \frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon_1} Z_p', \ldots \quad (71)$$

$$\lambda = \frac{\vartheta_0}{1 + \frac{4}{3}\pi\vartheta_0} L_p', \qquad \mu = \frac{\vartheta_0}{1 + \frac{4}{3}\pi\vartheta_0} M_p', \qquad \nu = \frac{\vartheta_0}{1 + \frac{4}{3}\pi\vartheta_0} N_p'. \ldots \quad (72)$$

Stellen wij ons voor, dat deze polarisatiën ook nog bestaan, wanneer, zooals bij ons vraagstuk het geval is, X_p', Y_p', Z_p', L_p', M_p', N_p' met den tijd veranderen en zoeken wij de totale electromotorische en magnetiseerende kracht, die dan in eenig punt binnen S werken. Wij hebben daartoe slechts aan (X_p', Y_p', Z_p'), (L_p', M_p', N_p') de electromotorische en magnetiseerende kracht toe te voegen, die tengevolge van (71) en (72) zelf werken. De componenten der eerste kracht zijn echter (verg. § 21)

$$-\frac{4}{3}\pi\xi + \frac{4}{3}\pi A\left(z\frac{d\mu}{dt} - y\frac{d\nu}{dt}\right), \qquad -\frac{4}{3}\pi\eta + \frac{4}{3}\pi A\left(x\frac{d\nu}{dt} - z\frac{d\lambda}{dt}\right),$$
$$-\frac{4}{3}\pi\zeta + \frac{4}{3}\pi A\left(y\frac{d\lambda}{dt} - x\frac{d\mu}{dt}\right) \ldots \quad (73)$$

en die der laatste

$$-\frac{4}{3}\pi\lambda + \frac{4}{3}\pi A\left(y\frac{d\zeta}{dt} - z\frac{d\eta}{dt}\right), \qquad -\frac{4}{3}\pi\mu + \frac{4}{3}\pi A\left(z\frac{d\xi}{dt} - x\frac{d\zeta}{dt}\right),$$
$$-\frac{4}{3}\pi\nu + \frac{4}{3}\pi A\left(x\frac{d\eta}{dt} - y\frac{d\xi}{dt}\right) \ldots \quad (74)$$

Laten wij dus voorloopig ook hier de krachten weg, die niet over de geheele uitgestrektheid van S dezelfde waarden hebben, dan worden de componenten

der totale electromotorische en magnetiseerende kracht resp. $-\frac{4}{3}\pi\xi + X_p'$, $-\frac{4}{3}\pi\eta + Y_p'$, $-\frac{4}{3}\pi\zeta + Z_p'$, $-\frac{4}{3}\pi\lambda + L_p'$, $-\frac{4}{3}\pi\mu + M_p'$, $-\frac{4}{3}\pi\nu + N_p'$, of, als men op (71) en (72) let, $\frac{\xi}{\varepsilon_1}$, $\frac{\eta}{\varepsilon_1}$, $\frac{\zeta}{\varepsilon_1}$, $\frac{\lambda}{\vartheta_0}$, $\frac{\mu}{\vartheta_0}$, $\frac{\nu}{\vartheta_0}$, zoodat dan de door (71) en (72) voorgestelde toestand werkelijk binnen den bol bestaan kan.

Deze polarisatiën oefenen echter (verg. § 19) naar buiten dezelfde werking uit als een electrisch moment, een stroomelement en een magnetisch moment in het middelpunt P met de componenten

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\varepsilon_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varepsilon_1} X_p', \text{ enz.}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\varepsilon_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varepsilon_1} X_p'\right), \text{ enz.}, \quad \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\vartheta_0}{1+\frac{4}{3}\pi\vartheta_0} L_p', \text{ enz.}$$

Het is gemakkelijk, hieruit af te leiden, dat alles op hetzelfde zal neerkomen, als wanneer in het middelpunt een enkel deeltje geplaatst was. Voor dat deeltje moet dan echter

$$\varkappa = \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3\varepsilon_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varepsilon_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

zijn, terwijl bovendien de reeds vroeger aangenomen vergelijking (5) moet gelden.

§ 33. Wij moeten intusschen, voor wij hiervan zeker zijn, nog onderzoeken of de electromotorische en de magnetiseerende krachten, die wij verwaarloosd hebben, een merkbaren invloed kunnen uitoefenen. Daartoe zullen wij nagaan, welke toestand door deze krachten binnen den bol S wordt opgewekt en vervolgens de werking, die de bol ten gevolge van dien toestand uitoefent, vergelijken met die der in de vorige § beschouwde polarisatiën.

Nu volgt uit (45), (46), (73) en (74) voor de componenten der verwaarloosde electromotorische en magnetiseerende kracht

$$-\frac{4}{3}\pi A\left(z\frac{d\mu'}{dt} - y\frac{d\nu'}{dt}\right) + \frac{4}{3}\pi A\left(z\frac{d\mu}{dt} - y\frac{d\nu}{dt}\right), \text{ enz}, \ldots\ldots \quad (76)$$

$$(\alpha+\beta)\frac{4}{3}\pi A.\frac{1}{\varrho^3}\left(y\frac{dm_z}{dt} - z\frac{dm_y}{\partial t}\right) - \frac{4}{3}\pi A\left(y\frac{d\zeta'}{dt} - z\frac{d\eta'}{dt}\right) + \frac{4}{3}\pi A\left(y\frac{d\zeta}{dt} - z\frac{d\eta}{dt}\right), \text{ enz.} . (77)$$

Blijkens (72) en de in § 21 aangegeven waarden van L_p', M_p', N_p' is $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, zoodat de componenten (76) verdwijnen. Verder is $m_x = \frac{4}{3}\pi\varrho^3\xi$, $m_y = \frac{4}{3}\pi\varrho^3\eta$, $m_z = \frac{4}{3}\pi\varrho^3\zeta$ en let men bovendien op de vergelijkingen (62), dan kan men voor de eerste der componenten (77) schrijven

$$A \cdot \frac{1}{\varrho^3}\left\{\frac{4}{3}\pi(\alpha + \beta) - \frac{4}{3}\pi\gamma\varrho^3 + 1\right\}\left(y\frac{dm_z}{dt} - z\frac{dm_y}{dt}\right)$$

of, volgens (64)

$$4\pi A \vartheta_0 \cdot \frac{\alpha}{\varrho^3}\left(y\frac{dm_z}{dt} - z\frac{dm_y}{dt}\right).$$

Hieruit volgt voor de componenten der magnetische polarisatie, die door de magnetiseerende kracht (77) binnen den bol S wordt opgewekt,

$$4\pi A\vartheta_0 \cdot \frac{\alpha}{\varrho^3}\left(y\frac{dm_z}{dt} - z\frac{dm_y}{dt}\right),\quad 4\pi A\vartheta_0 \cdot \frac{\alpha}{\varrho^3}\left(z\frac{dm_x}{dt} - x\frac{dm_z}{dt}\right),\quad 4\pi A\vartheta_0 \cdot \frac{\alpha}{\varrho^3}\left(x\frac{dm_y}{dt} - y\frac{dm_x}{dt}\right). \quad (78)$$

en het is nu alleen de vraag, welke werking hierdoor wordt uitgeoefend.

Nu ontstaat uit de gevonden polarisatie geenerlei magnetische werking, maar slechts een inductie. Om de electromotorische kracht daarvan te zoeken kan men weer de bij (78) behoorende grootheden $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (I, § 18) berekenen. Men vindt dan, dat de bedoelde electromotorische kracht in een punt buiten S gelijk is aan de electrostatische kracht, behoorende bij een electrisch moment in P met de componenten

$$-\frac{16}{15}\alpha\pi^2\varrho^2 A^2\vartheta_0 \cdot \frac{d^2 m_x}{dt^2},\qquad -\frac{16}{15}\alpha\pi^2\varrho^2 A^2\vartheta_0 \cdot \frac{d^2 m_y}{dt^2},\qquad -\frac{16}{15}\alpha\pi^2\varrho^2 A^2\vartheta_0 \cdot \frac{d^2 m_z}{dt^2}.$$

Let men nu op de waarde van α (§ 31), dan is het gemakkelijk in te zien, dat dit moment uiterst klein $\left(\text{van de orde } \left(\frac{\varrho}{l}\right)^2\right)$ is, vergeleken met het moment (m_x, m_y, m_z). Daar men evenzoo kan aantoonen, dat de door (78) in een punt van den bol zelf uitgeoefende electromotorische kracht ten opzichte van X_p', Y_p', Z_p' zeer klein is, zijn werkelijk de in de vorige § buiten beschouwing gelaten krachten zonder merkbaren invloed.

§ 34. Uit (75), in verband met (67), verkrijgen wij thans

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi \varrho^3 p \cdot \frac{4 \pi (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{3 + 4 \pi (\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_0)}.$$

Was nu $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, dan kwam men klaarblijkelijk tot het geval van den doorloopenden aether terug en werkelijk wordt dan ook $n = 1$. Stelde men daarentegen $\varepsilon_1 = \infty$, dan zou men den brekingsindex verkrijgen voor het geval, dat de deeltjes als volkomen geleidende bollen met den straal ϱ mochten beschouwd worden. Men zou dan vinden

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi \varrho^3 p$$

en hier stelt het tweede lid het gezamenlijke volume voor der in de ruimteeenheid aanwezige moleculen.

§ 35. Wij zullen eindelijk nog het geval behandelen, dat de geheele bol S gevuld is met aether, die dezelfde eigenschappen bezit als buiten den bol, maar dat daarin nabij het middelpunt P eenige deeltjes geplaatst zijn, die met vrije electriciteit zijn voorzien en door een uitwendige electromotorische kracht kunnen worden verschoven.

Nemen wij ter vereenvoudiging aan, dat slechts een dezer deeltjes A verplaatst kan worden en dat de andere (b. v. tengevolge van hunne zeer groote massa) als onbewegelijk beschouwd kunnen worden. Laat het deeltje A met een hoeveelheid electriciteit $+ e$ zijn toegerust en laat de algebraïsche som van de ladingen e der andere deeltjes $A' - e$ zijn. Laat eindelijk, wanneer men deze ladingen als massa's beschouwt, het zwaartepunt der laatste deeltjes in het punt P liggen en zij dit tevens de evenwichtsstand van A.

Wanneer dan nu de electromotorische kracht X_p' (verg. § 32) in de richting der x-as op den bol werkt, dan ontstaat vooreerst in den aether een diëlectrische polarisatie en tengevolge daarvan treedt vrije electriciteit op aan het oppervlak van S en in de onmiddellijke nabijheid der electrische deeltjes. Zij X_1 de electromotorische kracht, in de richting der x-as door de eerstgenoemde vrije electriciteit in P uitgeoefend en stellen wij dat A in de genoemde richting verplaatst wordt en wel over een afstand $c\,(X_p' + X_1)$, waarbij c een constante is. Wij onderstellen hierbij, dat die afstand vergeleken met ϱ zeer klein is en dat hetzelfde ook geldt van de afstanden, waarop zich de deeltjes A' van het middelpunt bevinden. Dan kan men aantoonen, dat tengevolge van de electromotorische kracht X_p' als zij constant is de volgende toestand in den bol ontstaat.

Het deeltje A wordt verschoven over den afstand

$$d = \frac{(1 + 4\pi\varepsilon_0)\, c}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0\right)(1 + 4\pi\varepsilon_0) + \frac{ce}{\varrho^3}\cdot\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0} X_p' \qquad (79)$$

In de onmiddellijke nabijheid van A treedt tengevolge van de diëlectrische polarisatie in den aether een hoeveelheid electriciteit $-\frac{4\pi\varepsilon_0}{1 + 4\pi\varepsilon_0} e$, evenzoo in de nabijheid van een der deeltjes A' een hoeveelheid $-\frac{4\pi\varepsilon_0}{1 + 4\pi\varepsilon_0} e$ op. De totale vrije electriciteit in A en A' bedraagt dus

$$\frac{e}{1 + 4\pi\varepsilon_0} \quad \text{en} \quad \frac{e}{1 + 4\pi\varepsilon_0} \qquad (80)$$

Evenzoo ontstaat tengevolge der diëlectrische polarisatie in den aether aan het buitenoppervlak van S vrije electriciteit met de vlaktedichtheid

$$a\,\sigma = a\,\frac{\varepsilon_0 (1 + 4\pi\varepsilon_0) + \frac{ce}{\varrho^3}\cdot 2\varepsilon_0}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0\right)(1 + 4\pi\varepsilon_0) + \frac{ce}{\varrho^3}\cdot\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0} X_p' \qquad (81)$$

Door deze laatste wordt in elk punt binnen den bol een electromotorische kracht in de richting der x-as uitgeoefend met de grootte $X_1 = -\frac{4}{3}\pi\sigma$. Bovendien oefent de vrije electriciteit (80) in elk punt een electromotorische kracht (X, Y, Z) uit. De diëlectrische polarisatie in eenig punt van den bol wordt dan bepaald door de vergelijkingen

$$\xi = \varepsilon_0 (X_p' + X_1 + X), \qquad \eta = \varepsilon_0 Y, \qquad \zeta = \varepsilon_0 Z \qquad (82)$$

Om aan te toonen, dat werkelijk de hier beschreven toestand door X_p' wordt opgewekt, merken wij vooreerst op, dat, als men uit (82) voor eenig punt aan het boloppervlak de diëlectrische polarisatie loodrecht op dat oppervlak afleidt, daarvoor juist $a\,\sigma$ gevonden wordt, zooals het geval moet zijn. Verder vindt men gemakkelijk, dat ook aan de voorwaarde $d = c\,(X_p' + X_1)$ voldaan is.

Werken ook de electromotorische krachten Y_p' en Z_p' in de richtingen der y- en z-as, dan ontstaan ook hierdoor dergelijke toestanden in den bol, als de boven beschouwde.

Wanneer eindelijk ook nog de constante magnetiseerende kracht (L_p', M_p', N_p') werkt, dan ontstaat weer de magnetische polarisatie (72).

Door dergelijke beschouwingen als in § 33 werden gebezigd kan men weer bewijzen, dat het hier gezegde ook doorgaat als X_p', enz. met den tijd veranderen en dat ook hier de verwaarloosde deelen van (45) en (46) zonder merkbaren invloed zijn.

§ 36. Beschouwen wij thans de werking van den bol naar buiten. De electrostatische werking behoorende bij den door X_p' opgewekten toestand hangt af van de electriciteit (80) en van de lading (81); zij is dus gelijk aan de werking van een electrisch moment

$$\frac{e d}{1 + 4 \pi \varepsilon_0} + \frac{4}{3} \pi \varrho^3 \sigma$$

in P in de richting der x-as. Stelt men derhalve

$$\varkappa = \frac{\frac{4}{3} \pi \varrho^3 \varepsilon_0 (1 + 4 \pi \varepsilon_0) + c e \left(1 + \frac{8}{3} \pi \varepsilon_0\right)}{\left(1 + \frac{4}{3} \pi \varepsilon_0\right)(1 + 4 \pi \varepsilon_0) + \frac{c e}{\varrho^3} \cdot \frac{8}{3} \pi \varepsilon_0}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (83)$$

dan werkt de door de kracht (X_p', Y_p', Z_p') opgewekte verdeeling van electriciteit op dezelfde wijze als een electrisch moment in P met de componenten

$$m_x = \varkappa X_p', \qquad m_y = \varkappa Y_p', \qquad m_z = \varkappa Z_p'.$$

Bij de berekening van de inductie en de magnetiseerende kracht, die door de electrische bewegingen binnen den bol worden uitgeoefend, splitse men de diëlectrische polarisatie (82) in de beide deelen $\xi_1 = \varepsilon_0 (X_p' + X_1)$ en $\xi_2 = \varepsilon_0 X$, $\eta_2 = \varepsilon_0 Y$, $\zeta_2 = \varepsilon_0 Z$. Nu is de werking van de strooming $\frac{\partial \xi_1}{\partial t}$ dezelfde als die van een stroomelement

$$\frac{4}{3} \pi \varrho^3 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (84)$$

in P in de richting der x-as. Om verder de werking der strooming $\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}, \frac{\partial \eta_2}{\partial t}, \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)$ te leeren kennen construeere men om P als middelpunt een bol S', zoo groot, dat hij alle electrische deeltjes bevat, maar toch zeer klein ten opzichte van S

(verg. de vorige §). Voor de ruimte tusschen S en S' kan men dan ξ_2, η_2, ζ_2 voor elk punt aangeven en dus ook de gezochte werking berekenen. Daar die berekening vrij omslachtig is, vermelden wij alleen, dat zij tot het resultaat voert, dat de bedoelde werking mag verwaarloosd worden, als S zeer klein is. Er blijft dus nog over de werking der strooming $\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}, \frac{\partial \eta_2}{\partial t}, \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)$ binnen S', alsmede de werking, die uit de beweging van A voortspruit. Nu is het wel moeilijk, in de onmiddellijke nabijheid van het deeltje A, dat zich door den aether heen beweegt, de electrische strooming aan te geven, maar dit levert geen bezwaar op, daar de straal van S' zeer klein is ten opzichte van den afstand tot elk buiten S gelegen punt. Zijn nl. x, y, z de coördinaten van eenig electrisch deeltje e binnen S', dan werkt dit als een stroomelement $\left(e\frac{dx}{dt}, e\frac{dy}{dt}, e\frac{dz}{dt}\right)$ en men mag dit stroomelement zonder merkbare fout in het middelpunt P plaatsen. Derhalve werkt de geheele bol S' als een stroomelement in P met de componenten $\frac{d}{dt}\Sigma e x$, $\frac{d}{dt}\Sigma e y$, $\frac{d}{dt}\Sigma e z$. Men berekene nu de hier voorkomende sommen voor de vrije electriciteit (80) en voor die, welke tengevolge der polarisatie ξ_2, η_2, ζ_2 binnen S' aan dat oppervlak optreedt, en voege het aldus verkregen stroomelement bij (84).

Past men dergelijke berekeningen ook toe op de bij Y'_r, Z_r behoorende electrische bewegingen, dan vindt men ten slotte, dat de electrische strooming binnen S dezelfde werking uitoefent als een stroomelement $\left(\frac{dm_x}{dt}, \frac{dm_y}{dt}, \frac{dm_z}{dt}\right)$ in P.

Daar eindelijk de magnetische polarisatie binnen den bol dezelfde werking uitoefent als in § 32, komt ook nu weer alles op hetzelfde neer als wanneer in P een enkel deeltje geplaatst was, mits men daarvoor de vergelijking (83) laat gelden.

Door substitutie in (67) wordt nu verder

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4}{3}\pi p \cdot \frac{ee}{1+4\pi\epsilon_0},$$

waarvoor men ook wegens de groote waarde van ϵ_0 mag schrijven

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{pee}{3\epsilon_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

Het is ons dus gebleken, dat bij twee zeer verschillende onderstellingen omtrent

de binnen de holten S gelegen stof de resultaten van § 30 geldig blijven en ik acht het zeer waarschijnlijk, dat hetzelfde ook bij andere onderstellingen het geval zal zijn.

§ 37. Keeren wij dan thans weer terug tot de onderstelling van § 2 en maken wij daarvan gebruik om den brekingsindex voor een mengsel van twee stoffen te bepalen. Laat voor een deeltje der eerste stof ϱ_1, $\varkappa_1$, $m_{x(1)}$, $m_{y(1)}$, $m_{z(1)}$ de grootheden voorstellen, die wij vroeger ϱ, $\varkappa$, m_x, m_y, m_z noemden, terwijl voor de deeltjes der tweede soort ϱ_2, $\varkappa_2$, $m_{x(2)}$, $m_{y(2)}$, $m_{z(2)}$ een overeenkomstige beteekenis hebben. Laat verder in de ruimteeenheid p_1 deeltjes der eerste en p_2 deeltjes der tweede soort voorkomen en nemen wij aan, dat de functiën $m_{x(1)}$, $m_{x(2)}$, enz. overal voldoen aan de betrekkingen

$$m_{x(2)} = s\, m_{x(1)}, \quad m_{y(2)} = s\, m_{y(1)}, \quad m_{z(2)} = s\, m_{z(1)},$$

waarbij s een voorloopig onbekend standvastig getal voorstelt. Verbeelden wij ons eindelijk, dat alle deeltjes bewegingen in den aether opwekken en laat deze voor de deeltjes der eerste soort door de constanten α_1 en β_1, voor die der tweede soort door de constanten α_2 en β_2 bepaald worden.

Op dezelfde wijze, als wij vroeger de vergelijkingen (α) gevonden hebben, verkrijgen wij thans voor een deeltje der eerste of tweede stof resp. de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_1 + \beta_1)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) m_{x(1)} + \frac{4}{3}\pi\varrho_1^3\,\xi' = m_{x(1)}, \\ (\alpha_2 + \beta_2)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) m_{x(2)} + \frac{4}{3}\pi\varrho_2^3\,\xi' = m_{x(2)}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha')$$

terwijl aan (β) en (γ) de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} (2\alpha_1 - \beta_1)\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\partial m_{x(1)}}{\partial t} + \frac{4}{3}\pi\varrho_1^3\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{\partial m_{x(1)}}{\partial t}, \\ (2\alpha_2 - \beta_2)\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\partial m_{x(2)}}{\partial t} + \frac{4}{3}\pi\varrho_2^3\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{\partial m_{x(2)}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\beta')$$

en

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_1 + \beta_1)\cdot\frac{8}{3}\pi m_{x(1)} + \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\varrho_1^3\,\xi' = \frac{\varrho_1^3}{\varkappa_1}m_{x(1)}, \\ (\alpha_2 + \beta_2)\cdot\frac{8}{3}\pi m_{x(2)} + \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\varrho_2^3\,\xi' = \frac{\varrho_2^3}{\varkappa_2}m_{x(2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma')$$

beantwoorden. Hier is telkens van de drie vergelijkingen, die op de x-, y en z-as betrekking hebben, slechts de eerste neergeschreven.

Wanneer nu zoowel $m_{x(1)}$, $m_{y(1)}$, $m_{z(1)}$ als $m_{x(2)}$, $m_{y(2)}$, $m_{z(2)}$ aan de vergelijkingen (C) voldoen, dan vindt men binnen eenige holte, onverschillig of daarin een deeltje der eerste of een der tweede stof geplaatst is,

$$\xi = Q\, m_{x(1)}, \text{ enz.},$$

als

$$Q = \frac{4}{3}\pi p_1 \left(\alpha_1 \frac{n^2+2}{n^2-1} + \beta_1\right) + \frac{4}{3}\pi p_2 s \left(\alpha_2 \frac{n^2+2}{n^2-1} + \beta_2\right)$$

gesteld wordt. Door substitutie in (α'), (β) en (γ') verkrijgt men dan de volgende zes vergelijkingen ter bepaling der onbekenden α_1, β_1, α_2, β_2, s en n.

$$(\alpha_1 + \beta_1)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) + \frac{4}{3}\pi \varrho_1^3 Q = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

$$(\alpha_2 + \beta_2)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) + \frac{4}{3}\pi \varrho_2^3 \frac{Q}{s} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (86')$$

$$(2\alpha_1 - \beta_1)\cdot\frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi \varrho_1^3 Q = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

$$(2\alpha_2 - \beta_2)\cdot\frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi \varrho_2^3 \frac{Q}{s} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (87')$$

$$(\alpha_1 + \beta_1)\cdot\frac{8}{3}\pi + \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\varrho_1^3 Q = \frac{\varrho_1^3}{\varkappa_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

$$(\alpha_2 + \beta_2)\cdot\frac{8}{3}\pi + \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\varrho_2^3 \frac{Q}{s} = \frac{\varrho_2^3}{\varkappa_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (88')$$

§ 38. De oplossing dezer vergelijkingen kan zeer eenvoudig worden aangegeven.

Verbeelden wij ons nl. dat de deeltjes der tweede stof werden weggenomen en dus in de ruimteeenheid alleen p_1 deeltjes der eerste stof overbleven, en noemen wij α_1', β_1' de constanten, waardoor dan de bewegingen in den aether bepaald zouden worden, n_1 den brekings-index en stellen wij verder $\frac{4}{3}\pi p_1\left(\alpha_1' \frac{n_1^2+2}{n_1^2-2} + \beta_1'\right) = q_1$, dan zouden de grootheden α_1', β_1', q_1 aan vergelijkingen voldoen, die met (63),

(64) en (65) overeenkomen. Vergelijkt men echter die vergelijkingen met (86), (87) en (88), dan blijkt het, dat

$$\alpha_1 = \alpha_1', \quad \beta_1 = \beta_1', \quad Q = q_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (89)$$

moet zijn.

Laat evenzoo α_2', β_2', n_2 betrekking hebben op het geval, dat de ruimteeenheid slechts p_2 deeltjes der tweede stof bevatte en zij $\frac{4}{3}\pi p_2 \left(\alpha_2' \frac{n_2^2+2}{n_2^2-1} + \beta_2'\right) = q_2$, dan volgt uit de vergelijking van (86′), (87′), (88′) met de drie betrekkingen, die ter bepaling van α_2', β_2', q_2 zouden dienen,

$$\alpha_2 = \alpha_2', \quad \beta_2 = \beta_2', \quad \frac{Q}{s} = q_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (90)$$

Daar nu door de formules van § 30 α_1', β_1', q_1, α_2', β_2', q_2 bekend zijn, is hetzelfde ook met α_1, β_1, α_2, β_2, s, Q (en dus n) het geval.

Wegens de groote waarde van ε_0 en de daaruit volgende kleine waarde der verhoudingen $\frac{\beta_1'}{\alpha_1'}$, $\frac{\beta_2'}{\alpha_2'}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ mag men voor Q, q_1 en q_2 stellen

$$Q = \frac{4}{3}\pi p_1 \alpha_1' \cdot \frac{n^2+2}{n^2-1} + \frac{4}{3}\pi p_2 s \alpha_2' \cdot \frac{n^2+2}{n^2-1},$$

$$q_1 = \frac{4}{3}\pi p_1 \alpha_1' \cdot \frac{n_1^2+2}{n_1^2-1}, \qquad q_2 = \frac{4}{3}\pi p_2 \alpha_2' \cdot \frac{n_2^2+2}{n_2^2-1}.$$

Hieruit volgt, als men op (89) en (90) let,

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} Q = \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2} q_1 + \frac{n_2^2-1}{n_2^2+2} q_2 s = \left(\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2} + \frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}\right) Q,$$

dus

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2} + \frac{n_2^2-1}{n_2^2+2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (91)$$

Bij deze vergelijking moet men in 't oog houden, dat n_1 en n_2 de brekingsindices der gemengde stoffen zijn bij de dichtheden, die zij in het mengsel hebben. Deze zijn echter $a_1 d$ en $a_2 d$, wanneer d de dichtheid van het mengsel is en wanneer de gewichtseenheid daarvan uit de hoeveelheden a_1 en a_2 der beide-

stoffen bestaat. Wanneer wij de constante k, die in § 30 werd ingevoerd, voor de beide stoffen met k_1 en k_2 aanduiden, dan is dus, blijkens (D), $\frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} = a_1 k_1 d$, $\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} = a_2 k_2 d$, zoodat (91) wordt

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2) d} = a_1 k_1 + a_2 k_2.$$

Derhalve moet ook voor het mengsel $\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2) d} = k$ bij veranderingen van d constant blijven en men heeft de eenvoudige betrekking

$$k = a_1 k_1 + a_2 k_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(E)}$$

Het is niet moeilijk, dit resultaat tot mengsels van meer dan twee stoffen uit te breiden. Wanneer k_1, k_2, k_3, enz. op de met elkaâr gemengde stoffen betrekking hebben en a_1, a_2, a_3 enz. de hoeveelheden dier stoffen zijn, die in de gewichtseenheid van het mengsel voorkomen, dan is in het algemeen voor het mengsel

$$k = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \text{ enz.} \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(E')}$$

Men kan hieruit bovendien afleiden, dat de verkregen formules ook doorgaan, wanneer de met elkaâr gemengde stoffen zelve mengsels zijn.

§ 39. Het verdient ten slotte opgemerkt te worden, dat de in dit hoofdstuk verkregen resultaten in verband met die, waartoe men geraakt bij een berekening van het specifiek induceerend vermogen van een medium met moleculaire structuur, weêr de vergelijking (51) van het vorige hoofdstuk bevestigen. Men had dan ook, van deze laatste uitgaande, de formules (D) en (E) eenvoudiger kunnen afleiden. Daar echter de bedoelde vergelijking in het vorige hoofdstuk slechts voor volkomen homogene middenstoffen is bewezen, kwam mij de hier gevolgde handelwijze strenger voor.

Wij hebben daardoor niet alleen het aandeel leeren kennen, dat bij de lichtbeweging aan de moleculen en aan den aether toekomt, maar wij zijn ook in staat gesteld, om den invloed der moleculaire discontinuïteit te beoordeelen. (Men zie het volgende hoofdstuk.) Bovendien schijnt mij de hier ingeslagen weg ook te kunnen leiden tot een theorie van den invloed, dien de beweging der middenstoffen op de beschouwde electrische bewegingen uitoefent.

III.

DE DISPERSIE VAN HET LICHT.

§ 1. De in het vorige hoofdstuk afgeleide resultaten konden alleen verkregen worden in de onderstelling, dat zoowel de straal ϱ der holten, alsook de onderlinge afstand δ der moleculen zeer klein zijn ten opzichte van de golflengte l, zoodat termen van de orde $\left(\frac{\varrho}{l}\right)^2$ en $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ konden worden verwaarloosd. Strikt genomen zullen dus onze uitkomsten alleen voor oneindig lange golven kunnen gelden en zullen zij voor eindige golven nog een correctie moeten ondergaan. Daar nu deze correctie afhankelijk van de golflengte wordt, zou men kunnen verwachten, langs dezen weg tot een verklaring der dispersie van het licht te kunnen geraken.

Om na te gaan, of dit het geval is, zullen wij thans den invloed onderzoeken, dien de termen van de orde $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ op de verkregen uitkomsten hebben, waarbij wij ter vereenvoudiging zullen aannemen, dat ϱ zeer klein is ten opzichte van δ en l, zoodat wij de termen van de orde $\left(\frac{\varrho}{l}\right)^2$ mogen blijven verwaarloozen. Verder zullen wij onderstellen, dat de moleculen van het medium even ver van elkaâr verwijderd zijn, als dit bij de gassen onder de normale omstandigheden van temperatuur en drukking het geval is. Kent men aan de gasdeeltjes een cubische rangschikking toe, dan is volgens VAN DER WAALS * hun gemiddelde afstand onder die omstandigheden ongeveer 0,0000025 m.M. Stelt men nu voor de golflengte (in 't luchtledige) 0,0003 m.M. (wat ten naastebij voor de lijn R in het ultraviolette spectrum het geval is), dan zouden op een golflengte nog ongeveer 120 deeltjes liggen en dit aantal zal natuurlijk bij vaste lichamen en vloeistoffen nog aanmerkelijk grooter worden. Hieruit blijkt, dat de breuk $\frac{\delta}{l}$ steeds zeer klein is en tengevolge daarvan neemt, zooals wij zullen zien, ook de boven besproken correctie slechts een zeer gering bedrag aan.

§ 2. De boven omtrent ϱ gemaakte onderstelling heeft tengevolge, dat het geheele onderzoek der §§ 1—22 van het vorige hoofdstuk onveranderd kan blijven. Wij hebben dus slechts ξ', η', ζ' te berekenen en om deze grootheden

* VAN DER WAALS, Over de continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand, p. 105.

binnen eenige holte S te vinden is het wederom voldoende voor elke molecule Q de waarde te zoeken, die zij in 't middelpunt P (x', y', z') dier holte oplevert en vervolgens over al de moleculen Q te sommeeren.

In het vorige hoofdstuk vonden wij voor het aandeel, dat Q in ξ_1 oplevert

$$\xi'_{1(q)} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{1}{r} f_2 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{1}{r} f_3 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \right\} - \alpha \Delta' \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \dots\dots\dots (1)$$

en het bleek dan verder, dat men, althans voor die deelen van het medium, die niet te dicht bij P zijn gelegen, $\Sigma \xi'_{1(q)}$ door een integraal kon vervangen.

Daartoe verdeelden wij de ruimte in een aantal even groote gesloten vakken, die elk eene molecule bevatten. Wij konden dan het tweede lid van (1), dat wij in 't vervolg door F zullen aanduiden, over de geheele uitgestrektheid van eenig vak als constant beschouwen en daaruit volgde, dat men $\xi'_{1(q)}$ kon vervangen door de integraal $p \iiint F \, dx \, dy \, dz$, genomen over het vak C_q, waarin de molecule Q geplaatst is.

Zoodra wij nu echter δ en dus ook de afmetingen van het vak C_q niet meer ten opzichte van l verwaarloozen, zal men, zelfs als PQ zeer groot is, de grootheid F niet meer over het geheele vak als constant mogen beschouwen. Toch is het ook dan nog mogelijk $\Sigma \xi'_{1(q)}$ door een integraal te vervangen.

§ 3. Onderstellen wij daartoe, dat de deeltjes van het medium een regelmatige cubische rangschikking bezitten, zoodat bij behoorlijke keuze der coördinaatassen, in elk punt met de coördinaten $a\delta$, $b\delta$, $c\delta$ een deeltje ligt, wanneer slechts a, b, c geheele getallen zijn. Wij kunnen dan voor C_q een kleinen cubus nemen, die om Q als middelpunt met de ribben evenwijdig aan de coördinaatassen beschreven is, en waarvan de ribbe de lengte δ heeft.

Duiden wij dan de waarde van eenige veranderlijke in Q door den index q aan en stellen wij voor eenig punt binnen C_q kortheidshalve

$$x - x_q = \mathrm{x}, \qquad y - y_q = \mathrm{y}, \qquad z - z_q = \mathrm{z},$$

dan verkrijgt men door toepassing van het theorema van TAYLOR

$$F = F_q + \mathrm{x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_q + \mathrm{y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_q + \mathrm{z} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_q + \frac{1}{2} \mathrm{x}^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_q + \frac{1}{2} \mathrm{y}^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_q +$$
$$+ \frac{1}{2} \mathrm{z}^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)_q + \mathrm{x}\mathrm{y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_q + \mathrm{y}\mathrm{z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right)_q + \mathrm{z}\mathrm{x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \right)_q + \text{enz.}$$

Men vermenigvuldige deze vergelijking met $\frac{1}{\delta^3}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{\delta^3}\, d\tau$ en integreere over den cubus C_q. Daarbij vallen alle termen weg, die een oneven macht van x, y, of z bevatten en men verkrijgt, als men ook die weglaat, waarin de zesde en hoogere differentiaalquotienten van F en de factoren δ^6, δ^5, enz. voorkomen,

$$\frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = F_q + \frac{1}{24}\,\delta^2\,(\triangle F)_q + \frac{1}{1152}\,\delta^4\,(\triangle\triangle F)_q - \frac{1}{2880}\,\delta^4\,(\triangle_2 F)_q \;.\;.\; (2)$$

Hierbij wijst het teeken $\triangle\triangle$ aan, dat de bewerking, die door $\triangle$ wordt aangewezen, tweemaal achtereenvolgens op F moet worden toegepast, terwijl $\triangle_2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$ is gesteld.

Geheel op dezelfde wijze verkrijgt men ook, als wederom de zesde en hoogere differentiaalquotienten van F worden weggelaten

$$\frac{1}{\delta}\iiint \triangle F\, d\tau = \delta^2\,(\triangle F)_q + \frac{1}{24}\,\delta^4\,(\triangle\triangle F)_q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

$$\delta\iiint \triangle\triangle F\, d\tau = \delta^4\,(\triangle\triangle F)_q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

en

$$\delta\iiint \triangle_2 F\, d\tau = \delta^4\,(\triangle_2 F)_q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

Elimineert men nu uit (2), (3), (4) en (5) de grootheden $(\triangle F)_q$, $(\triangle\triangle F)_q$, $(\triangle_2 F)_q$, dan verkrijgt men

$$\xi_1'{}_{(q)} = F_q = \frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\delta}\iiint \triangle F\, d\tau + \frac{1}{5760}\,\delta\iiint (5\,\triangle\triangle F + 2\triangle_2 F)\, d\tau \;.\;.\; (6)$$

In het tweede lid staan hier slechts de drie eerste termen der oneindig voortloopende reeks, die men door voortgezette ontwikkeling voor F_q verkrijgt. Van die reeks zijn ook de volgende termen integralen over den cubus C_q; zij bevatten achtereenvolgens de zesde en hoogere differentiaalquotienten van F en de factoren δ^3, δ^5, enz.

§ 4. Denken wij ons om P als middelpunt een cubus geconstrueerd met de ribben evenwijdig aan de coördinaatassen en zoeken wij $\Sigma\, \xi_1'{}_{(q)} = \xi_1'{}_{(a)}$ voor alle moleculen Q, die buiten dezen cubus liggen. Wij hebben daartoe slechts voor

elk dezer deeltjes eene vergelijking op te stellen, die met (6) overeenkomt en vervolgens op te tellen.

Wij verkrijgen dan

$$\xi_P = \frac{1}{\delta^3}\iiint_{(A)} F d\tau - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\delta}\iiint_{(A)} \Delta F d\tau + \frac{1}{5760}\delta\iiint_{(A)} (5\Delta\Delta F + 2\Delta_2 F)\, d\tau - \text{enz.} \quad (7)$$

Hier moeten de integralen, zoo als door den index wordt aangewezen, genomen worden over de ruimte A, die uit al de vakken C_q bestaat. Klaarblijkelijk is dit juist de geheele ruimte buiten een cubus B, die om P als middelpunt met de ribben evenwijdig aan de coördinaatassen beschreven is. Voor de halve ribbe van B heeft men dan

$$l = \left(m + \frac{1}{2}\right)\delta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

waarbij m eenig geheel getal voorstelt.

Om nu de tweede en volgende integralen in de vergelijking (7) te vinden, kan men gebruik maken van de omstandigheid, dat bij elk dezer grootheden de functie onder het integraalteeken uit een som van differentiaalquotienten bestaat, zoodat men (daar F en de differentiaalquotienten ervan op oneindigen afstand verdwijnen) door particeele integratie de integralen over de ruimte A kan herleiden tot andere, die over het oppervlak van den cubus B moeten genomen worden. Voor dat oppervlak kan men echter, als het getal m niet te groot is, gebruik maken van de in § 25 van het vorige hoofdstuk voor $\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$, $\frac{1}{r} f_2\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$, $\frac{1}{r} f_3\left(x, y, z, t - \frac{r}{V_0}\right)$ aangegeven reeksontwikkeling, waarbij men slechts de termen behoeft te behouden, die de tweede afgeleiden van m_x, m_y, m_z bevatten en in de uitkomst termen van de orde $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ opleveren. Op deze wijze heb ik gevonden

$$\iiint_{(A)} \Delta F d\tau = \alpha\left[-6{,}34\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 0{,}43\,\Delta m_x + 5{,}05\frac{\partial P}{\partial x} - 8{,}34\cdot\frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right],$$

waarbij voor de differentiaalquotienten de waarde in P moet genomen worden. Ook de grootheid

$$\iiint_{(A)} (5\Delta\Delta F + 2\Delta_2 F)\, d\tau$$

heb ik op dezelfde wijze berekend. Het is hier echter niet noodig de uitkomst geheel meê te deelen, maar wij kunnen volstaan met de opmerking, dat deze grootheid den vorm $\frac{1}{c^2} G$ aanneemt, waarbij G de tweede differentiaalquotienten van m_x, m_y, m_z bevat en onafhankelijk van c is.

Door substitutie in (7) verkrijgen wij thans

$$\xi_1'(a) - \frac{1}{\delta^3}\iiint_{(A)} F\,d\tau = \frac{\alpha}{\delta}\left[0{,}26\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}02\,\Delta\, m_x - 0{,}21\frac{\partial P}{\partial x} + 0{,}35\,.\,\frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{\delta}\cdot\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} G' + \text{enz.}, \ldots \qquad (9)$$

waarbij van G' hetzelfde geldt, wat boven omtrent G werd opgemerkt. De termen der reeks, die hier niet zijn neergeschreven, bevatten in den noemer machten van $m + \frac{1}{2}$.

§ 5. Het is nu duidelijk, dat in (9) de term $\frac{\alpha}{\delta}\cdot\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} G'$ en alle volgende des te grooter worden, naarmate men voor m een kleiner getal neemt. Dit kan ons ook niet verwonderen, wanneer wij op het ontstaan dezer termen letten. De grootheid $\frac{\alpha}{\delta}\cdot\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} G'$ b. v. is afkomstig van die termen in de ontwikkeling van § 3, die de vierde differentiaalquotienten van F en de vierde macht van δ bevatten. En als men op de waarde (1) van F let, dan is het gemakkelijk in te zien, dat deze termen (vergeleken met de voorgaande) een des te grooter bedrag aannemen, naarmate de afstand $P\,Q$ kleiner wordt.

Het zal nu altijd mogelijk zijn, m zoo groot te kiezen, dat in (9) de term $\frac{\alpha}{\delta}\cdot\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} G'$ en de daarop volgende mogen worden verwaarloosd. Om te onderzoeken, hoe groot m daarvoor zijn moet, kan men van de volgende beschouwing gebruik maken.

Wanneer wij achtereenvolgens $m = 0, 1, 2, 3$, enz. stellen, dan verkrijgen wij een aantal cubi B, door wier oppervlakken de ruimte in cubische lagen verdeeld wordt, zoodat de μ^{de} cubische laag van P af gerekend het verschil is

van twee cubi, waarvoor resp. $m = \mu - 1$ en $m = \mu$ is. Past men dan de vergelijking (9) achtereenvolgens toe op de ruimte buiten deze beide lichamen, dan verkrijgt men door aftrekking

$$\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)} - \frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta} \cdot \frac{2\mu}{\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)^2}\, G' + \text{enz.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

waarbij de integraal over de beschouwde cubische laag en eveneens $\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)}$ over de daarin aanwezige moleculen moet genomen worden.

Men kan echter voor de eerste cubische lagen $\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)}$ en $\iiint F\, d\tau$ ook door rechtstreeksche berekening vinden, waarbij de reeksontwikkeling van § 25 van het vorige hoofdstuk wederom goede diensten bewijst. Ik vind op deze wijze voor de eerste, tweede en derde cubische laag resp.

$$\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)} = \frac{\alpha}{\delta}\left[0{,}40\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 1{,}35\, \Delta\, m_x + 3{,}66\, \frac{\partial P}{\partial x} - 12{,}74 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta}\left[-0{,}95\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 1{,}08\, \Delta\, m_x + 4{,}19\, \frac{\partial P}{\partial x} - 12{,}69 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right],$$

$$\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)} - \frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta}\left[1{,}35\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}27\, \Delta\, m_x - 0{,}53\, \frac{\partial P}{\partial x} - 0{,}05 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right]; \quad (11)$$

$$\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)} = \frac{\alpha}{\delta}\left[-1{,}88\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2{,}16\, \Delta\, m_x + 8{,}37\, \frac{\partial P}{\partial x} - 25{,}39 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta}\left[-1{,}90\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2{,}16\, \Delta\, m_x + 8{,}38\, \frac{\partial P}{\partial x} - 25{,}39 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right],$$

$$\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)} - \frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta}\left[0{,}02\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}00\, \Delta\, m_x - 0{,}01\, \frac{\partial P}{\partial x} - 0{,}00 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right]; \quad (12)$$

$$\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)} = \frac{\alpha}{\delta}\left[-2{,}85\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 3{,}24\, \Delta\, m_x + 12{,}56\, \frac{\partial P}{\partial x} - 38{,}08 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta}\left[-2{,}86\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 3{,}24\, \Delta\, m_x + 12{,}57\, \frac{\partial P}{\partial x} - 38{,}08 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right],$$

$$\Sigma\, \xi_1{}'_{(q)} - \frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta}\left[0{,}01\, \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}00\, \Delta\, m_x - 0{,}01\, \frac{\partial P}{\partial x} - 0{,}00 \,.\, \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right]. \quad (13)$$

Vergelijkt men deze uitkomsten met (10), dan blijkt het, dat reeds voor de

tweede en derde cubische laag de term met G' en de daarop volgende zonder invloed zijn, wanneer men in de coëfficienten van $\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}$, enz. slechts een nauwkeurigheid tot in de eerste decimaal verlangt. Daaruit kan men besluiten, dat hetzelfde van de overeenkomstige termen in de vergelijking (9) geldt, wanneer men deze toepast voor de ruimte buiten de derde cubische laag en dus $m = 3$ stelt. Want de coëfficienten van $\frac{\alpha}{\delta} G'$ en eveneens die van de volgende termen worden dan in (9) slechts weinig grooter of aanmerkelijk kleiner dan in (10) voor de tweede of derde cubische laag. Voor de laatste wordt b. v. in (10) de coëfficient van $\frac{\alpha}{\delta} G'$ $\frac{96}{1225}$, terwijl de overeenkomstige coëfficient in (9) voor $m = 3$ $\frac{4}{49} = \frac{100}{1225}$ wordt. De daarop volgende coëfficienten worden in (9) alle kleiner, dan in (10).

Ten overvloede heb ik mij nog door rechtstreeksche berekening overtuigd, dat de term $\frac{\alpha}{\delta} \cdot \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2} G'$ in (9) voor $m = 3$ mag verwaarloosd worden.

Wij hebben derhalve voor de geheele ruimte buiten de derde der beschouwde lagen:

$$\Sigma \xi_1'(q) - \frac{1}{\delta^3} \iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta} \left[0{,}26 \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}02 \, \Delta m_x - 0{,}21 \frac{\partial P}{\partial x} + 0{,}35 \, . \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} \right] \quad . \; . \; (14)$$

Binnen de eerste dezer lagen blijft nog een kleine ruimte over, in welke geen enkel deeltje Q geplaatst is. Berekent men echter de waarde van $\frac{1}{\delta^3} \iiint F\, d\tau$, wanneer de integratie wordt uitgestrekt over deze ruimte met uitzondering van een oneindig kleinen om P als middelpunt beschreven bol B', dan verkrijgt men

$$\frac{1}{\delta^3} \iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta} \left[- 0{,}12 \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}13 \, \Delta m_x + 0{,}52 \frac{\partial P}{\partial x} - 1{,}59 \, . \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} \right],$$

zoodat voor de bedoelde ruimte

$$\Sigma \xi_1'(q) - \frac{1}{\delta^3} \iiint F\, d\tau = \frac{\alpha}{\delta} \left[0{,}12 \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 0{,}13 \, \Delta m_x - 0{,}52 \frac{\partial P}{\partial x} + 1{,}59 \, . \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} \right] \quad . \; . \; (15)$$

is.

§ 6. Door de vergelijkingen (11)—(15) bij elkaâr op te tellen verkrijgen wij in het eerste lid

$$\xi_1' = \frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau ,$$

waarbij de integraal over de geheele ruimte buiten den bol B' moet genomen worden. Voldoen nu de electrische trillingen wederom aan de vergelijkingen (C) van het vorige hoofdstuk, dan kan men bij de berekening van deze integraal denzelfden weg volgen als in §§ 24—26 van dat hoofdstuk en men verkrijgt dan ook, daar $\frac{1}{\delta^3} = p$ is, dezelfde uitkomst. Dus is

$$\frac{1}{\delta^3}\iiint F\, d\tau = \alpha \cdot \frac{4}{3}\pi p\, m_x \cdot \frac{n^2+2}{n^2-1}$$

en uit de samenteliing van (11)—(15) volgt ten slotte

$$\xi_1' = \alpha \cdot \frac{4}{3}\pi p\, m_x \cdot \frac{n^2+2}{n^2-1} + \frac{\alpha}{\delta}\left[1{,}76\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}16\,\Delta m_x - 1{,}28\frac{\partial P}{\partial x} + 1{,}89 \cdot \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right].$$

Daar, zooals wij in het vorige hoofdstuk zagen, ξ_2' zelf reeds uiterst klein is ten opzichte van ξ_1', kunnen wij de kleine correctie, die de vroeger voor ξ_2' gevonden waarde zou moeten ondergaan, gerustelijk buiten rekening laten. Wij vinden dus

$$\xi' = \frac{4}{3}\pi p\left(\alpha\frac{n^2+2}{n^2-1}+\beta\right)m_x + \frac{\alpha}{\delta}\left[1{,}76\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 0{,}16\,\Delta m_x - 1{,}28\frac{\partial P}{\partial x} + 1{,}89 \cdot \frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\right] \quad . . (16)$$

en dergelijke uitdrukkingen zijn nu ook gemakkelijk voor η' en ζ' op te stellen.

§ 7. Laat thans den bewegingstoestand bepaald worden door de vergelijkingen

$$m_x = a \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{y}{V} + p\right), \qquad m_y = 0, \qquad m_z = 0,$$

waarbij T den oscillatietijd voorstelt en a en p constanten van bekende beteekenis zijn.

Substitueert men deze waarden in de vergelijkingen voor ξ', η', ζ', dan blijkt het, dat de betrekkingen (62) van het vorige hoofdstuk nog gelden, wanneer men slechts

$$q = \frac{4}{3}\pi p\left\{\alpha\frac{n^2+2}{n^2-1} + \beta - \alpha \cdot 3\pi\frac{\delta^2}{l^2}(1{,}89 - 0{,}16\, n^2)\right\}$$

stelt.

In de uitkomsten, die wij in § 30 van het vorige hoofdstuk verkregen hebben, heeft men dus slechts $\frac{n^2+2}{n^2-1}$ door $\frac{n^2+2}{n^2-1} - 3\pi\frac{\delta^2}{l^2}(1{,}89 - 0{,}16\,n^2)$ te vervangen en hieruit volgt, wanneer wij het tweede lid der vergelijking (67), dat onafhankelijk van de golflengte is, kortheidshalve door C aanduiden

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} - 3\pi\frac{\delta^2}{l^2}(1{,}89 - 0{,}16\,n^2) = C \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Stellen wij nu, dat voor oneindig lange golven de brekingsindex van het beschouwde medium $n_0 = 1{,}5$ is, dan moet

$$C = \frac{n_0^{\,2}+2}{n_0^{\,2}-1} = 3{,}4$$

zijn. Met behulp van deze waarde kan men dan uit (17) den brekingsindex voor eindige golflengten bepalen. Stelt men daarbij (§ 1) $\frac{\delta}{l} = \frac{1}{120}$, dan verkrijgt men ongeveer $n = 1{,}5 - 0{,}0002$.

Het blijkt dus, dat de brekingsindex met afnemende golflengte een weinig kleiner zou moeten worden, zoodat men uit de hier medegedeelde beschouwingen in geen geval de waargenomen dispersie zal kunnen afleiden. Maar bovendien valt de invloed der moleculaire discontinuiteit zoo klein uit, dat hij gerustelijk buiten rekening mag worden gelaten. Immers, de boven gevonden uitkomst wil zeggen, dat, tengevolge dier discontinuiteit, bij een medium, waarvan de deeltjes zoover van elkaâr verwijderd zijn, als bij een gas, en waarvoor toch ongeveer $n = 1{,}5$ is, de brekingsindex voor oneindig lange golven en die voor de lijn R in het ultraviolette spectrum eerst in de vierde decimaal zouden verschillen. Ik besluit hieruit, dat men bij de lichtbeweging de moleculaire discontinuiteit mag verwaarloozen, zooals wij dit in het vorige hoofdstuk gedaan hebben.

§ 8. Er is nog eene omstandigheid, die voor deze zienswijze pleit. Wanneer de moleculaire discontinuiteit werkelijk aanmerkelijke wijzigingen in de uitkomsten van het vorige hoofdstuk noodzakelijk maakte, dan zou uit de boven afgeleide formules volgen, dat die wijzigingen niet voor elke voortplantings- en trillingsrichting hetzelfde bedrag zouden moeten hebben. Zoo zouden zich b. v. transversale trillingen in de richting, die den hoek tusschen de x- en y-as midden door deelt, met verschillende snelheid moeten voortplanten, al naarmate de trillingen evenwijdig aan de z-as of loodrecht daarop waren gericht. Het medium zou dan een eigenaardige dubbele breking moeten vertoonen.

Nu kan men een regelmatige cubische rangschikking der deeltjes verwachten bij de kristallen van het regelmatige stelsel; de inwendige structuur is daar althans zoo, dat deze lichamen niet in alle richtingen, maar slechts met betrekking tot drie onderling loodrechte, dezelfde eigenschappen bezitten *. Deze kristallen mag men echter althans met groote benadering als optisch isotroop beschouwen en wanneer er een regelmatige dubbele breking van de boven bedoelde soort bestaat is zij stellig zeer zwak †.

Het verdient nog opgemerkt te worden, dat in de vroeger aangenomen undulatietheorie de moleculaire discontinuiteit — hetzij men deze wil opvatten als een discontinuiteit van den aether zelven, of als afwisselingen in de dichtheid, naarmate men een punt beschouwt, dat op grooteren of kleineren afstand van eene in den aether geplaatste molecule gelegen is — zeer goed van invloed kon zijn. Want die theorie neemt aan, dat de op eenig aetherdeeltje werkende kracht uitgaat van de andere deeltjes, die er het naast bij zijn gelegen en dan kan men verwachten, dat elk gemis aan continuiteit of homogeneiteit in den aether zich in de voortplantingssnelheid van het licht en wel het meest bij kleine golflengten moet doen gevoelen. Het komt mij echter voor, dat deze theorie moeilijk zal kunnen verklaren, waarom de kristallen van het regelmatige stelsel optisch isotroop zijn.

§ 9. Wanneer wij intusschen de electromagnetische theorie van het licht aannemen, dan blijft er, naar 't mij voorkomt, niets anders over, dan de oorzaak der dispersie in de moleculen zelve van het medium te zoeken. En men kan inderdaad tot formules geraken, waaruit een kleurschifting volgt, wanneer men uitgaat van de onderstelling, dat in zulk een molecule, zoodra er een electrisch moment in wordt opgewekt, tevens een zekere massa in beweging wordt gebracht.

---

* Tengevolge daarvan hebben deze lichamen ook niet in alle richtingen denzelfden elasticiteitscoëfficient. Men zie hierover WOLDEMAR VOIGT, *Bestimmung der Elasticitätsconstante des Steinsalzes*, *Pogg. Ann.* Ergänzungsband VII, p. 214.

† Men heeft wel bij kristallen van het regelmatige stelsel afwijkingen van de isotropie aangetroffen, maar deze schenen dan verklaard te kunnen worden uit een niet volkomen regelmatigen bouw. Of er dus misschien een uiterst zwakke dubbele breking, zooals de in den tekst bedoelde, bestaat, is nog niet beslist. De proeven van BRAVAIS, waardoor bewezen werd, dat in een richting loodrecht op de octaëdervlakken der kristallen geen merkbaar verschil in de voortplantingssnelheid van stralen met verschillende trillingsrichtingen bestaat (*Comptes rendus*, Tome 32, p. 112) leeren hieromtrent niets, daar juist in die richting volgens de boven ontwikkelde theorie dat verschil 0 moet zijn.

Nemen wij, om dit te doen zien, vooreerst wederom aan, dat elke molecule in het middelpunt eener overigens ledige holte S in den aether ligt. Wij hebben vroeger ondersteld, dat het moment (m_x, m_y, m_z), dat in zulk een deeltje door een electromotorische kracht (X, Y, Z) wordt opgewekt, steeds wordt bepaald door de vergelijkingen

$$m_x = \varkappa X, \qquad m_y = \varkappa Y, \qquad m_z = \varkappa Z \dots\dots\dots\dots (18)$$

Thans zullen wij echter beproeven, ons een voorstelling te vormen van hetgeen er eigenlijk in de molecule plaats heeft.

Verbeelden wij ons daartoe in de molecule eenige deeltjes, die met vrije electriciteit zijn toegerust en door een uitwendige electromotorische kracht onderling verplaatst kunnen worden. Laat eenvoudigheidshalve slechts een dezer deeltjes A, dat van een lading $+ e$ voorzien is, bewegelijk zijn, en laat de evenwichtsstand van A samenvallen met het zwaartepunt der andere deeltjes, wanneer men de electrische ladingen daarvan als massa's beschouwd. (De algebraïsche som dezer ladingen is natuurlijk $- e$.) Bevindt zich dan A in zijn evenwichtsstand, dan is het electrisch moment der molecule 0. Zoodra echter A in de richtingen der assen de verplaatsingen x, y, z heeft, bestaat in de molecule een moment met de componenten $m_x = e x$, $m_y = e y$, $m_z = e z$.

Wij zullen nu aannemen, dat, als A verplaatst is, de andere deelen der molecule een kracht op A uitoefenen, die steeds naar den evenwichtsstand gericht en evenredig aan de verplaatsing is. De componenten dier kracht kunnen dan door $- g x$, $- g y$, $- g z$ worden voorgesteld, waarbij g een positieve constante is. Werkt bovendien de constante uitwendige electromotorische kracht (X, Y, Z), dus op A een kracht ($e X$, $e Y$, $e Z$), dan zal er evenwicht bestaan, zoodra $x = \frac{e}{g} X$, $y = \frac{e}{g} Y$, $z = \frac{e}{g} Z$ is. Het moment, dat dan in het deeltje is opgewekt, wordt dus bepaald door de vergelijkingen (18), wanneer men slechts

$$\varkappa = \frac{e^2}{g}$$

stelt.

Laat echter thans de kracht (X, Y, Z) veranderlijk zijn en het deeltje A in beweging verkeeren, zooals dit bij de lichtverschijnselen het geval is. Dan is de totale kracht, die op eenig oogenblik op A werkt,

$$e X - g x, \qquad e Y - g y, \qquad e Z - g z$$

en als μ de massa van het deeltje is, dan wordt zijne beweging bepaald door de vergelijkingen

$$\mu \frac{d^2 x}{d t^2} = e X - g x, \quad \mu \frac{d^2 y}{d t^2} = e Y - g y, \quad \mu \frac{d^2 z}{d t^2} = e Z - g z \, ^* \quad \ldots \quad (19)$$

Beschouwen wij nu alleen een periodieke beweging met den oscillatietijd T. Dan kan men stellen

$$x = a_1 \cos \frac{2\pi}{T}(t + p_1), \quad y = a_2 \cos \frac{2\pi}{T}(t + p_2), \quad z = a_3 \cos \frac{2\pi}{T}(t + p_3).$$

waarbij a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, p_3 onafhankelijk van t zijn. Daar dan $\frac{d^2 x}{d t^2} = - \frac{4\pi^2}{T^2} x$, $\frac{d^2 y}{d t^2} = - \frac{4\pi^2}{T^2} y$, $\frac{d^2 z}{d t^2} = - \frac{4\pi^2}{T^2} z$ is volgt uit (19)

$$x = \frac{e}{g - \frac{4\pi^2 \mu}{T^2}} X, \quad y = \frac{e}{g - \frac{4\pi^2 \mu}{T^2}} Y, \quad z = \frac{e}{g - \frac{4\pi^2 \mu}{T^2}} Z.$$

Stelt men dus

$$\varkappa = \frac{e^2}{g - \frac{4\pi^2 \mu}{T^2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

welke grootheid onafhankelijk van t is, dan gelden nog steeds de betrekkingen (18).

Het geheele onderzoek van het vorige hoofdstuk blijft nu verder onveranderd, maar men zal blijkens (20) voor $\varkappa$ een des te grootere waarde in rekening moeten brengen, naarmate T kleiner wordt (zoo lang ten minste $g > \frac{4\pi^2 \mu}{T^2}$ is). Daar echter, zooals wij zagen (II, § 31), n des te grooter wordt, naarmate $\varkappa$ toeneemt, moet dan de brekingsindex toenemen, als T kleiner wordt, zoodat men werkelijk een kleurschifting verkrijgt, zooals die is waargenomen. De for-

---

* Wanneer op het deeltje A ook een weerstand werkt, die afhankelijk is van zijn snelheid, dan treden in deze vergelijkingen ook termen met $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ op. Men kan dan uit die formules een absorptie van het licht afleiden en in verband daarmeê wordt ook de wet der dispersie gewijzigd.

mule daarvoor vindt men door de waarde van $\varkappa$ (20) in de vergelijking (67) van het vorige hoofdstuk te substitueeren; aldus wordt

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} = \frac{A - \frac{B}{l^2}}{\frac{C}{l^2} - D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

waarbij A, B, C, D constanten voorstellen en l de golflengte in het luchtledige is.

§ 10. Tot een dergelijke uitkomst geraakt men ook, wanneer men van de onderstelling uitgaat, dat ook de bollen S met aether gevuld zijn en dat nabij het middelpunt eenige electrische deeltjes geplaatst zijn, waarvan er zich een door den aether heen kan bewegen. In § 35 van het vorige hoofdstuk werd dan alles bepaald door de grootheid c, maar men kan nu door een dergelijke redeneering als boven werd gebezigd aantoonen, dat c afhankelijk van den oscillatietijd moet worden, zoodra het bewegelijke electrische deeltje aan een zekere massa μ is gebonden. Men verkrijgt dan weer

$$c = \frac{e}{g - \frac{4\pi^2\mu}{T^2}}$$

en substitueert men deze waarde in de vergelijking (85) van het vorige hoofdstuk, dan neemt deze den vorm

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1}{P - \frac{Q}{l^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

aan, waarbij P en Q onafhankelijk van de golflengte zijn. Dit schijnt wel de eenvoudigste dispersieformule te zijn, die men uit de electromagnetische lichttheorie kan afleiden.

Het is niet onwaarschijnlijk, dat zich in een molecule meer dan één bewegelijk electrisch deeltje bevindt en men kan ook omtrent de krachten, waardoor deze deeltjes naar hun evenwichtsstand terug worden gedreven, nog verschillende onderstellingen maken. Het boven gezegde maakt het echter waarschijnlijk, dat ook bij andere onderstellingen de in het vorige hoofdstuk ingevoerde constante $\varkappa$ en dus ook n des te grooter zullen zijn, naarmate T en l afnemen. Welken vorm de betrekking tusschen n en l aanneemt hangt van de onderstellingen af,

die men omtrent den aard der moleculen maakt. De vergelijkingen (21) en (22) zijn slechts een paar voorbeelden der betrekkingen, die men op deze wijze kan verkrijgen.

§ 11. Wat intusschen vooral dient opgemerkt te worden is dit, dat, zoolang men slechts licht van een bepaalden trillingstijd beschouwt, de grootheid z als constant mag worden aangemerkt en dat dan ook de uitkomsten van het vorige hoofdstuk geldig blijven. Voor elke waarde van T moet dus bij veranderingen in dichtheid $\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$ constant blijven en evenzoo moeten de betrekkingen tusschen den brekingsindex van een mengsel en die der bestanddeelen ervan onveranderd blijven bestaan, wanneer men slechts al deze brekingsindices voor dezelfde lijn van het spectrum neemt.

Ten gevolge van dit laatste kan men nu ook de dispersieformule van een mengsel uit die der bestanddeelen afleiden. Wanneer wij b. v. voor enkelvoudige stoffen de formule (22) toepassen, dan volgt voor een mengsel van twee stoffen uit de vergelijking (91) van het vorige hoofdstuk

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1}{P_1 - \frac{Q_1}{l^2}} + \frac{1}{P_2 - \frac{Q_2}{l^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

en evenzoo verkrijgt men voor een mengsel van meer dan twee stoffen de formule

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \Sigma \frac{1}{P - \frac{Q}{l^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Daar, zooals wij later zullen zien, de brekingsindex van sommige scheikundige verbindingen bij een ruwe benadering op dezelfde wijze uit die der bestanddeelen kan berekend worden, als wanneer deze met elkaâr vermengd zijn, wordt ook voor verbindingen een dergelijke formule als (24) waarschijnlijk. Dat men overigens die formule ook door een andere kan vervangen, die b. v. uit (21) is afgeleid, behoeft wel nauwelijks vermeld te worden.

§ 12. In de onderstaande tabellen vindt men eenige uitkomsten vereenigd, die ik bij de vergelijking der formules (22) en (23) met de ervaring verkregen heb.

De eerste formule kan eigenlijk alleen voor enkelvoudige stoffen gelden. Maar wanneer voor een samengesteld lichaam de dispersie niet te groot is, mag men zonder groote fout de formule (24) door (22) vervangen. Ik heb nu deze laatste

toegepast op eenige lichamen, wier brekingsindices ook door CHRISTOFFEL en KETTELER zijn berekend. CHRISTOFFEL bezigde daarbij de bekende formule

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)}},$$

KETTELER daarentegen de vergelijking

$$n - 1 = \alpha \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\lambda l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Hierin zijn α en β constanten, terwijl λ en l de golflengten in den vrijen aether en in het medium zelf voorstellen.

In de volgende tabellen vindt men onder N, n_c en n_k de brekingsindices, zooals zij waargenomen en door CHRISTOFFEL en KETTELER berekend zijn *. Verder is n' de brekingsindex, berekend naar de formule (22), waarbij de stralen B en G voor de bepaling der constanten zijn gebezigd. Voor de golflengten heb ik gebruik gemaakt van de door VAN DER WILLIGEN in de *Archives du Musée Teyler*, Vol. III. tegenover p. 70, meêgedeelde tabel, waarin als eenheid der golflengte 10^{-7} m.M. is aangenomen.

Phenylhydraat (DALE en GLADSTONE).

$n_0 : \sqrt{2} = 1{,}5220$ $1 + \alpha = 1{,}52197$ $P = 3{,}2823$

$\lambda_0 = 0{,}07966$ † $\beta = 0{,}03894$ † $\log Q = 6{,}68710$

	N	n_c	$N-n_c$	n_k	$N-n_k$	n'	$N-n'$
B	1,5416	—		—		—	
C	1,5433	1,5436	— 3	1,5436	— 3	1,5437	— 4
D	1,5488	1,5492	— 4	1,5491	— 3	1,5493	— 5
E	1,5564	1,5566	— 2	1,5566	— 2	1,5569	— 5
F	1,5639	1,5634	+ 5	1,5633	+ 6	1,5635	+ 4
G	1,5763	—		—		—	
H	1,5886	1,5880	+ 6	1,5877	+ 9	1,5874	+ 12

* Al deze waarden zijn ontleend aan KETTELER, *Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase*, p. 86.

† Uitgedrukt in tienduizendste Par. duimen.

Water (VAN DER WILLIGEN) Temperatuur 16°,58 C.

$n_0 : \sqrt{2} = 1,32445$ $1 + \alpha = 1,32447$ $P = 4,9798$

$\lambda_0 = 0,04874$ $\beta = 0,030075$ $log\, Q = 6,61010$

	N	n_c	$N-n_c$	n_k	$N-n_k$	n'	$N-n'$
B	1,3306	—		—		—	
C	1,3314	—		1,3312	+ 2	1,3312	+ 2
D	1,3333	1,3330	+ 3	1,3329	+ 4	1,3329	+ 4
E	1,3355	—		1,3351	+ 4	1,3352	+ 3
F	1,3374	1,3371	+ 3	1,3371	+ 3	1,3371	+ 3
G	1,3408	—		—		—	
H	1,3436	—		1,3439	— 3	1,3439	— 3

Terpentijn (FRAUNHOFER).

$n_0 : \sqrt{2} = 1,4599$ $1 + \alpha = 1,459911$ $P = 3,6530$

$\lambda_0 = 0,06035$ $\beta = 0,031420$ $log\, Q = 6,53235$

B	1,4705	—		—		—	
C	1,4715	1,4716	— 1	1,4715	0	1,4716	— 1
D	1,4744	1,4745	— 1	1,4744	0	1,4745	— 1
E	1,4784	1,4783	+ 1	1,4783	+ 1	1,4784	0
F	1,4817	1,4818	— 1	1,4817	0	1,4818	— 1
G	1,4882	—		—		—	
H	1,4939	1,4938	+ 1	1,4937	+ 2	1,4937	+ 2

Flintglas N°. 13 (FRAUNHOFER).

$n_0 : \sqrt{2} = 1,6092$ $1 + \alpha = 1,608935$ $P = 2,8908$

$\lambda_0 = 0,07570$ $\beta = 0,034461$ $log\, Q = 6,53157$

B	1,6277	—		—		—	
C	1,6297	1,6297	0	1,6296	+ 1	1,6296	+ 1
D	1,6350	1,6349	+ 1	1,6349	+ 1	1,6350	0
E	1,6420	1,6419	+ 1	1,6419	+ 1	1,6421	— 1
F	1,6483	1,6482	+ 1	1,6482	+ 1	1,6484	— 1
G	1,6603	—		—		—	
H	1,6711	1,6711	0	1,6708	+ 3	1,6706	+ 5

Het blijkt uit deze uitkomsten, dat de afwijkingen bij de formule (22) wel iets grooter zijn dan bij de beide andere, maar toch klein genoeg, om bij een eerste benadering (22) te mogen toepassen.

Bij de gassen gaat (22) over in de vergelijking (25), die door KETTELER juist naar aanleiding van zijne metingen voor deze lichamen werd opgesteld. Want daar hier n slechts zeer weinig van de eenheid verschilt, zoodat men de tweede en hoogere machten van $n - 1$ mag verwaarloozen, kan men voor het eerste lid van (22) $\frac{2}{3}(n - 1)$ schrijven, terwijl aan den anderen kant in (25) het product λl door de tweede macht der golflengte in het luchtledige mag vervangen worden.

Ook de formule (23) heb ik op een enkel geval toegepast, nl. op de brekingsindices van zwavelkoolstof, zooals ze door VAN DER WILLIGEN bepaald zijn *. Men vindt in de volgende tabel onder I verschillende lijnen van FRAUNHOFER aangegeven naar de notatie van VAN DER WILLIGEN, onder II den waargenomen brekingsindex n voor $18^0,75$ C., onder III de verschillen $n' - n$, waarbij n' door VAN DER WILLIGEN berekend werd met behulp van de formule

$$n' = 1,583671 + 1483490\,\lambda^{-2} + 786867\,(10)^6\,\lambda^{-4} + 79422900\,(10)^{12}\,\lambda^{-6},$$

en eindelijk onder IV de verschillen $n'' - n$, waarbij n'' berekend is door de formule (23) met de constanten

$$P_1 = 3,19972\ ; \qquad P_2 = 44,6870,$$
$$log\ Q_1 = 6,703390; \quad log\ Q_2 = \ 8,487845.$$

Om deze constanten te bepalen heb ik evenals VAN DER WILLIGEN de stralen 1β, 14α, 40 en 51α gebezigd, waarbij alleen, om een betere aansluiting te verkrijgen, de waargenomen brekingsindex van 40 met 0,00011 werd verminderd. Ik moet intusschen doen opmerken, dat men de vier constanten niet scherp bepalen kan, want bij een voorloopige berekening, waarbij de brekingsindex van 40 niet was gewijzigd vond ik $P_1 = 3,48363$; $P_2 = 20,8700$; $log\ Q_1 = 6,657048$; $log\ Q_2 = 8,065316$.

I.	II.	III	IV.	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.
1β	1,60995	— 1	+ 1	14α	1,62885	0	0	40	1,67818	— 5	—11
3α	1,61316	+ 8	+ 8	22α	1,64174	+ 2	+ 5	$41\begin{cases}\alpha\\\beta\end{cases}$	1,68011	+11	+ 5
4β	1,61615	+ 5	+ 4	27α	1,64440	— 1	+ 2	43	1,68295	+ 3	— 4
5	1,61945	+ 5	+ 4	34	1,65379	— 1	+ 1	46	1,69115	— 1	— 7
11	1,62508	— 2	— 2	36β	1,66697	—15	—16	51α	1,70112	+ 1	0

* *Archives du Musée Teyler*, Vol. III, Tabel A, tegenover p. 62.

Ten slotte zij nog opgemerkt, dat de formule (23) in het gebruik zoo lastig is, dat zelfs dan als hare theoretische juistheid bewezen was (wat volgens §§ 9—11 niet het geval is), de formule van CAUCHY als een veel gemakkelijker interpolatieformule kon behouden blijven.

IV.

OVER DE BETREKKINGEN TUSSCHEN DE BREKINGSINDICES EN DE DICHTHEID EN SAMENSTELLING DER MIDDENSTOFFEN.

§ 1. De formules, die ons het theoretisch onderzoek voor den samenhang tusschen den brekingsindex en de dichtheid heeft opgeleverd, moeten thans nog met de ervaring worden vergeleken. Wij zullen daarbij tevens over een paar andere formules spreken, die men heeft gebezigd, om dien samenhang uit te drukken. De eerste is de bekende vergelijking

$$\frac{n^2 - 1}{d} = \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

die het eerst uit de emissietheorie werd afgeleid, maar, zooals HOEK heeft aangetoond, ook uit de vroeger aangenomen undulatietheorie kan verkregen worden. De tweede der bedoelde formules, nl.

$$\frac{n - 1}{d} = \text{const.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

die in de meeste gevallen beter met de werkelijkheid overeenstemt dan (A), is, voor zoover mij bekend is, nooit langs theoretischen weg verkregen.

Bij de gassen is het verschil $n - 1$ zoo klein, dat men, althans bij de nauwkeurigheid, die men gewoonlijk in de meting van den brekingsindex bereikt heeft, de tweede en hoogere machten ervan mag verwaarloozen. Dientengevolge wordt $n^2 - 1 = 2(n - 1)$ en $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{2}{3}(n - 1)$, zoodat zoowel de formule (A) als onze formule

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d} = \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

in de vergelijking (B) overgaan. Gelijk men weet is echter uit de metingen van BIOT en ARAGO de juistheid dier vergelijking gebleken, terwijl KETTELER * heeft aangetoond, dat zij voor elke bepaalde golflengte doorgaat.

In den laatsten tijd heeft MASCART † de vergelijking (B) aan een uitvoerig onderzoek onderworpen. Hij leidde uit zijne proeven af, dat de betrekking, die er bij constante temperatuur tusschen den brekingsindex en de drukking H bestaat, bij elk gas kan worden voorgesteld door de vergelijking

$$n - 1 = CH\,(1 + BH), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarbij C en B constanten zijn. Aan den anderen kant mag men naar de proeven van REGNAULT stellen

$$d = C'H\,(1 + B'H)$$

(C' en B' constant). Volgens (B) zou dus

$$B = B'$$

moeten zijn. Het volgende tafeltje bevat voor een aantal gassen de uit de proeven van REGNAULT en MASCART volgende waarden van $B' . 10^4$ en $B . 10^4$, waarbij als eenheid van drukking die van een kwikkolom ter hoogte van 1 M. is aangenomen.

	Lucht.	N.	O.	H.	CO.	CO_2.	N_2O.	NO.	C_2N_2.	SO_2.
$B'10^4$	+ 12,0	+ 7,2	+ 16,5	— 4,8	+ 38	+ 87	+ 80	+ 20	+ 316	+333
$B . 10^4$	+ 7,2	+ 8,5	+ 11,1	— 8,6	+ 8,9	+ 72	+ 88	+ 7	+ 277	+250

MASCART gelooft de afwijkingen (met uitzondering van kooloxyde en stikstofoxyde) aan de waarnemingsfouten te mogen toeschrijven.

Het verdient hierbij opgemerkt te worden, dat, zoodra de metingen nauwkeurig genoeg zijn, om de grootheid B te leeren kennen, ook de tweede macht van n—1 niet meer verwaarloosd mag worden en dus de formules (A), (B) (C) niet meer in elkaar overgaan.

---

* KETTELER, *Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase*, p. 44.

† *Annales de l'École normale* 2e Série, VI. *Pogg. Ann.*, 153, p. 149 en *Beiblätter*, 1, p. 257.

Wanneer wij de termen $B\,C\,H^2$ en $C^2\,H^2$ behouden, maar de termen $B\,C^2\,H^3$ enz. verwaarloozen, dan volgt uit (1)

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{2}{3}\,C\,H\left\{1+(B-\frac{1}{6}\,C)\,H\right\}$$

zoodat volgens onze formule (C)

$$B'=B-\frac{1}{6}\,C$$

zou moeten zijn. Nu is $\frac{1}{6}\,C\,.\,10^4$ bij de meeste der onderzochte gassen iets kleiner dan 1, bij een enkel (b. v. $C_2\,N_2$) bijna 2 en wanneer men dus $B\,.\,10^4$ door $(B-\frac{1}{6}\,C)\,10^4$ vervangt, wordt de afwijking van $B'\,.\,10^4$ bij de meeste gassen iets, hoewel zeer weinig, grooter.

Eindelijk zij nog opgemerkt, dat de afwijkingen (met uitzondering van N en $N_2\,O$) dien zin hebben, dat de brekingsindex bij samendrukking iets minder toeneemt, dan volgens (C) het geval zou moeten zijn.

Mascart heeft ook den invloed onderzocht, dien een temperatuursverhooging op den brekingsindex uitoefent. Hij besluit uit zijne proeven, dat bij lucht, H, N, $N_2\,O$, $C\,O_2$, $S\,O_2$ en $C_2\,N_2$ de brekingsindex bij verwarming sneller afneemt, dan de formule (B) aangeeft. Berekent men b. v. door middel van die formule uit de verandering van n den uitzettingscoëfficient, dan vindt men voor lucht 0,00382 in plaats van 0,00367.

Voor de lucht komt echter V. v. Lang * tot een tegengesteld resultaat. Neemt men voor den brekingsindex der lucht bij 0° C 1,0002945, dan volgt uit (B), wanneer men voor den uitzettingscoëfficient 0,00367 stelt, voor 100° n = 1,000215, terwijl dan volgens v. Lang n = 1,000228 is. Men ziet, hoe volgens dezen natuurkundige de brekingsindex bij verhitting iets minder afneemt, dan uit de formule zou volgen.

§ 2. Men heeft slechts voor een enkele vloeistof, namelijk voor water de toeneming van den brekingsindex door samendrukking onderzocht, maar des te grooter is het aantal bepalingen omtrent den samenhang tusschen den brekingsindex en de temperatuur. Wij zullen eenige dier bepalingen met de formule (C) vergelijken, maar moeten daarbij al dadelijk opmerken, dat men geen volkomen overeenstemming zal mogen verwachten. Vooreerst toch is bij de afleiding dier

* *Pogg. Ann.*, 153, p. 448.

formule aangenomen, dat, al verandert de dichtheid, de moleculen zelve onveranderd blijven, maar dit is niet zeer waarschijnlijk. Ten tweede hebben wij ondersteld, dat de aether tusschen de moleculen dezelfde eigenschappen heeft, als in het luchtledige, maar dit is misschien, als de deeltjes een groot deel der ruimte opvullen, niet meer het geval. Verder is het mogelijk, dat de gewone wetten voor de electrische werkingen op afstanden, zoo klein als die der vloeistofdeeltjes, niet meer doorgaan. Eindelijk kan men zich nog voorstellen, dat de kracht, die zich tegen het scheiden der electriciteiten in eenig deeltje verzet, niet meer geheel van dit deeltje zelf, maar ook gedeeltelijk van de omringende uitgaat en zoodra dit het geval is moet de grootheid k (II, § 30) die wij tot nu toe als constant beschouwden, van de dichtheid afhankelijk worden.

§ 3. Ik heb vooreerst de uitkomsten onderzocht, die WÜLLNER * voor een aantal vloeistoffen en mengsels ervan verkregen heeft. Hij bepaalde voor verschillende temperaturen, die gewoonlijk beneden 40° C. bleven, de dichtheid d en de brekingsindices $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma$ voor de drie lijnen $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ van het waterstofspectrum. Het bleek daarbij, dat binnen de gekozen temperatuurgrenzen $d, n_\alpha, n_\beta, n_\gamma$ als lineaire functiën van de temperatuur T konden worden voorgesteld. In tabel I. vindt men d, n_α, n_γ op deze wijze aangegeven en tevens den constanten term A der dispersieformule van CAUCHY. WÜLLNER bezigde voor de 15 eerste vloeistoffen deze formule met twee, voor de overige met drie termen.

I.

	d	n_α	n_γ	A
Glycerine *a*	1,23454—0,000630 T.	1,453177—0,000265 T.	1,465064—0,000267 T.	1,443978—0,000263 T.
1 Water; 3,7 glycerine *a*	1,18598—0,000557 ″	1,426172—0,000231 ″	1,437604—0,000233 ″	1,417306—0,000229 ″
1 ″ ; 1 ″	1,11500—0,000444 ″	1,389760—0,000185 ″	1,400239—0,000187 ″	1,381627—0,000183 ″
1 ″ ; 0,5 ″	1,07549—0,000365 ″	1,369609—0,000154 ″	1,379567—0,000156 ″	1,361916—0,000152 ″
Water		1,333138—0,000099 ″	1,342290—0,000099 ″	1,326067—0,000099 ″
Glycerine *b*	1,25073—0,000635 ″	1,463651—0,000270 ″	1,475732—0,000272 ″	1,454262—0,000268 ″
1 Alcohol *a*; 4 glycerine *b*.	1,14155—0,000660 ″	1,442453—0,000292 ″	1,454235—0,000206 ″	1,433283—0,000289 ″
1 ″ ; 2 ″	1,07420—0,000725 ″	1,428029—0,000305 ″	1,439160—0,000310 ″	1,419385—0,000301 ″
1 ″ ; 0,998 ″	0,99748—0,000750 ″	1,411538—0,000330 ″	1,422213—0,000336 ″	1,403238—0,000325 ″
1 ″ ; 0,4997 ″	0,93710—0,000805 ″	1,398365—0,000356 ″	1,408848—0,000363 ″	1,390209—0,000350 ″
Alcohol *a*	0,81281—0,00085 ″	1,368431—0,000389 ″	1,378158—0,000395 ″	1,360860—0,000384 ″
Verzadigde oplossing van chloorzink	1,96816—0,001153 ″	1,509257—0,000288 ″	1,528169—0,000291 ″	1,494538—0,000286 ″
1 Water; 3,997 verz. chloorzinkoplossing.	1,68519—0,000992 ″	1,460379—0,000266 ″	1,476405—0,000268 ″	1,447911—0,000265 ″
1 Water; 1,996 verz. chloorzinkoplossing.	1,52457—0,000882 ″	1,433093—0,000258 ″	1,447567—0,000261 ″	1,421859—0,000256 ″
1 Water; 0,9998 verz. chloorzinkoplossing.	1,36623—0,000793 ″	1,404593—0,000250 ″	1,417494—0,000252 ″	1,394583—0,000249 ″
Zwavelkoolstof	1,29366—0,001506 ″	1,634066—0,000780 ″	1,692149—0,000850 ″	1,601500—0,000754 ″
1 Alcohol *b*; 3,955 zwavelkoolstof	1,14913—0,001373 ″	1,551274—0,000678 ″	1,594015—0,000750 ″	1,526409—0,000646 ″
1 ″ ; 2,12836 ″	1,08013—0,001294 ″	1,512477—0,000626 ″	1,547691—0,000680 ″	1,491031—0,000593 ″
1 ″ ; 1,03111 ″	0,99533—0,001178 ″	1,465695—0,000560 ″	1,492206—0,000590 ″	1,449166—0,000544 ″
Alcohol *b*	0,81328—0,00085 ″	1,368431—0,000389 ″	1,378158—0,000395 ″	1,361141—0,000389 ″

* *Pogg. Ann.*, 133, p. 1.

§ 4. Gewoonlijk past men de formules (A) en (B) alleen voor den brekingsindex A van stralen met oneindige golflengte toe en ik heb daarom vooreerst de boven voor die grootheid aangegeven waarden met de formules (A), (B), (C) vergeleken. Daarbij heb ik den volgenden weg ingeslagen.

Wanneer voor eenige temperatuur T_0 de dichtheid d_0 en de bedoelde constante A_0 is, dan zou volgens de formule (C) voor elke andere temperatuur T

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}=\frac{A_0^2-1}{A_0^2+1}\cdot\frac{d}{d_0}=\frac{A_0^2-1}{A_0^2+2}\left\{1-\frac{q}{d_0}(T-T_0)\right\}$$

moeten zijn, waarbij q de vermindering in dichtheid voor een temperatuursverhooging van 1° C. voorstelt. Is nu $T - T_0$ niet te groot, dan kan men uit deze vergelijking A afleiden in den vorm eener reeks, die naar de opklimmende machten van $\frac{q}{d_0}(T-T_0)$ is gerangschikt. De eerste termen daarvan zijn

$$A=A_0-\frac{(A_0^2-1)(A_0^2+2)}{6\,A_0}\cdot\frac{q}{d_0}(T-T_0)+\frac{(A_0^2-1)^2(3A_0^2-2)(A_0^2+2)}{72\,A_0^3}\cdot\frac{q^2}{d_0^2}(T-T_0)^2\;.\;.\;(2)$$

Nu is de grootste waarde, die A_0 in tabel I ooit aanneemt, 1,6015 en dan wordt de coëfficiënt van $\frac{q^2}{d_0^2}(T-T_0)^2$ 0,215, terwijl voor alle kleinere waarden van A_0 ook die breuk kleiner wordt. Verder is bij alle onderzochte stoffen $\frac{q}{d_0} < 0{,}0012$. Wanneer wij nu bij elke stof voor T_0 de gemiddelde temperatuur nemen, die bij de proeven van WÜLLNER voorkomt, dan is $T - T_0$ nooit grooter dan 12°. Uit een en ander volgt, dat de laatste term in (2) steeds minder dan $0{,}215 \times (0{,}0012)^2 \times 12^2$, of minder dan 0,00005 moet bedragen. Daar men nu bij de proeven van WÜLLNER toch alleen van de vierde decimaal geheel zeker is* kunnen wij gerustelijk in (2) den laatsten term weglaten en dus A als een lineaire functie van T beschouwen. De vermindering van A voor een temperatuursverhooging van 1° C. zou dan volgens de formule (C)

$$\frac{(A_0^2-1)(A_0^2+2)}{6\,A_0}\cdot\frac{q}{d_0}$$

moeten zijn en kan dus uit de waargenomen waarden van A_0, q en d_0 berekend worden †. Evenzoo kan men die vermindering ook uit de formules (A) en (B)

* WÜLLNER, t. a. p., p. 30.

† Eigenlijk kan de formule (C) slechts voor de *absolute* brekingsindices gelden, maar ik heb mij overtuigd, dat men, door bij vaste lichamen en vloeistoffen de formule toe te passen op de brekingsindices ten opzichte van de lucht in de berekende vermindering daarvan slechts fouten verkrijgt, die gerustelijk verwaarloosd mogen worden.

berekenen. In tabel II vindt men naast de waargenomen waarde der bedoelde vermindering ook de aldus berekende waarden. Ik heb daarbij alleen in de eerste kolom de getallen voluit opgegeven en in de volgende het decimaalteeken en de nullen weggelaten. Bij elke stof is tusschen haakjes de voor T_0 genomen temperatuur aangegeven; het zou overigens slechts een klein verschil maken, als men eenvoudig $T_0 = 0^0$ had gesteld.

II.

	Waargenomen.	Berekend volgens (A)	Waarn. — ber.	Berekend volgens (B).	Waarn. — ber.	Berekend volgens (C).	Waarn. — ber.
Glycerine *a* . . . . (20^0)	0,000263	192	71	227	36	260	3
1 Water; 3,7 glycerine *a*. . . . (20^0)	0,000229	167	62	196	33	223	6
1 〃 ; 1 〃 . . . . (20^0)	0,000183	131	52	152	31	170	13
1 〃 ; 0,5 〃 . . . . (20^0)	0,000152	107	45	123	29	136	16
Glycerine *b* . . . . (20^0)	0,000268	195	73	231	37	266	2
1 Alcohol *a*; 4 glycerine *b* . (20^0)	0,000289	213	76	251	38	286	3
1 〃 ; 2 〃 . (20^0)	0,000301	241	60	283	18	322	— 21
1 〃 ; 0,998 〃 . (20^0)	0,000325	260	65	303	22	342	— 17
1 〃 ; 0,4997 〃 . (20^0)	0,000350	288	62	335	15	376	— 26
Alcohol *a* . . . . (20^0)	0,000384	328	56	377	7	419	— 35
Verzadigde opl. van chloorzink (30^0)	0,000286	242	44	290	—4	340	— 54
1 Water; 3,997 〃 〃 〃 (25^0)	0,000264	223	41	264	0	303	— 39
1 〃 ; 1,996 〃 〃 〃 (25^0)	0,000256	208	48	244	12	278	— 22
1 〃 ; 0,9998 〃 〃 〃 (25^0)	0,000249	197	52	229	20	258	— 9
Zwavelkoolstof . . . . (15^0)	0,000754	569	185	700	54	860	— 106
1 Alcohol *b*; 3,955 zwavelkoolstof (20^0)	0,000646	522	124	629	17	746	— 100
1 〃 ; 2,12836 〃 (20^0)	0,000593	493	100	588	5	688	— 95
1 〃 ; 1,03111 〃 (20^0)	0,000544	450	94	532	12	611	— 67

Daar de dichtheid van water niet door een lineaire functie van de temperatuur kan worden voorgesteld kon voor deze vloeistof de boven aangegeven weg

niet worden gevolgd. Ik heb daarom uit de voor 10° waargenomen waarde van Δ die voor 20° en 30° berekend, waarbij voor de dichtheid de bepalingen van KOPP zijn gebezigd. Men vindt de uitkomsten in tabel III.

III.

Δ.

T.	Waargenomen.	Berekend volgens (A).	Waarn. — ber.	Berekend volgens (B).	Waarn. — ber.	Berekend volgens (C).	Waarn. — ber.
10°	1,32508						
20°	1,32409	1,32467	— 58	1,32461	— 52	1,32456	— 47
30°	1,32310	1,32396	— 86	1,32380	— 70	1,32368	— 58

Bij de beoordeeling van bovenstaande uitkomsten moet men in 't oog houden, dat de metingen den brekingsindex stellig tot in vier decimalen nauwkeurig geven. Nu treden echter in tabel II bij elk der drie formules (A), (B) en (C) tusschen de waargenomen en berekende vermindering van Δ voor 1° C. verschillen op, die grooter zijn dan 0,00001. Daaruit volgt, dat, wanneer men uit de waarde van Δ voor een bepaalde temperatuur de waarde afleidt voor een temperatuur, die slechts 10° C. hooger is, deze van de waargenomen waarde reeds in de vierde decimaal zal afwijken. Dergelijke verschillen vindt men ook in tabel III. Wij kunnen dus besluiten, dat geen der drie formules in volkomen overeenstemming is met de werkelijkheid.

De formule (A) voert steeds tot een te kleine verandering van den brekingsindex en wijkt meer van de waarheid af, dan de beide andere vergelijkingen. De afwijkingen klimmen bij (A) zelfs tot 29 pCt. van de waargenomen verandering van Δ (bij de mengsels van glycerine en water). Van de formules (B) en (C) is voor glycerine en water de laatste, voor alcohol, chloorzinkoplossing en zwavelkoolstof de eerste het best met de ervaring in overeenstemming. In procenten van de waargenomen verandering van Δ uitgedrukt, is de grootste afwijking in tabel II bij beide formules 19 pCt.; zij komt voor bij het laatste mengsel van water en glycerine voor de eerste, bij de verzadigde chloorzinkoplossing voor de laatste formule.

Bij zwavelkoolstof geeft de formule (C) bij een temperatuursverhooging van 10° C reeds verschillen in de derde decimaal; bij de andere vloeistoffen kan zij, evenals de formule (B) bij een eerste benadering worden aangenomen, wanneer men slechts voor een klein temperatuurinterval een overeenstemming tot in de derde decimaal verlangt.

Bij alcohol, chloorzinkoplossing en zwavelkoolstof wijken de waargenomen waarden van de door de formule (C) berekende in dien zin af, dat de brekingsindex minder verandert dan volgens de formule het geval zou moeten zijn. Bij het water is het tegengestelde het geval. In het vervolg zullen wij kortheidshalve een afwijking in den eersten zin negatief, die bij het water positief noemen.

In overeenstemming met het bij deze laatste vloeistof opgemerkte vindt men ook bij de mengsels daarvan met glycerine een positieve afwijking, die met het watergehalte toeneemt. Evenzoo openbaart zich de invloed van het water hierin, dat de negatieve afwijkingen bij de chloorzinkoplossingen des te kleiner worden, naarmate zij meer verdund zijn.

§ 5. Volgens de in het vorige hoofdstuk meêgedeelde beschouwingen moet onze formule (C) voor elke bepaalde golflengte gelden. In tabel IV heb ik naast de waargenomen vermindering van n_α en n_γ voor 1^0 C. de vermindering aangegeven, die aan de formule (C) zou beantwoorden. Bij de berekening daarvan is steeds voor T_0 dezelfde temperatuur genomen als in tabel II.

Evenzoo vindt men in tabel V voor het water de waargenomen waarden van n_α en n_γ voor 20^0 en 30^0 vergeleken met die, welke uit den brekingsindex voor 10^0 door de formule (C) zijn berekend.

IV.

	VERMINDERING VOOR 1° C. VAN					
	n_α			n_γ		
	Waargenomen.	Berekening.	Waarneming — berekening.	Waargenomen.	Berekening.	Waarneming — berek.
Glycerine *a*	0,000265	267	— 2	0,000267	275	— 8
1 Water; 3,7 glycerine *a*	0,000231	228	+ 3	0,000233	235	— 2
1 „ ; 1 „	0,000185	174	+ 11	0,000187	180	+ 7
1 „ ; 0,5 „	0,000154	140	+ 14	0,000156	144	+ 12
Glycerine *b*	0,000270	273	— 3	0,000272	281	— 9
1 Alcohol *a*; 4 glycerine *b*. . . .	0,000292	293	— 1	0,000296	303	— 7
1 „ ; 2 „	0,000305	330	— 25	0,000310	340	— 30
1 „ ; 0,998 „	0,000330	350	— 20	0,000336	361	— 25
1 „ ; 0,4997 „	0,000356	386	— 30	0,000363	397	— 34
Alcohol *a*	0,000389	429	— 40	0,000395	442	— 47
Verzadigde chloorzinkoplossing. . .	0,000288	353	— 65	0,000291	369	— 78
1 Water; 3,997 verz. chloorzinkopl.	0,000266	314	— 48	0,000268	327	— 59
1 „ ; 1,996 „ „ .	0,000258	287	— 29	0,000261	298	— 37
1 „ ; 0,9998 „ „ .	0,000250	265	— 15	0,000252	275	— 23
Zwavelkoolstof	0,000780	920	— 140	0,000850	1032	— 182
1 Alcohol *b*; 3,955 zwavelkoolstof.	0,000678	790	— 112	0,000750	867	— 117
1 „ ; 2,12836 „ .	0,000626	724	— 98	0,000680	786	— 106
1 „ ; 1,03111 „ .	0,000560	638	— 78	0,000590	682	— 92

V.

WATER.

T.	n_α Waargenomen.	n_α Berekend.	Waarneming — berekening.	n_γ Waargenomen.	n_γ Berekend.	Waarneming — berekening.
10°	1,33215			1,34130		
20°	1,33116	1,33162	— 54	1,34031	1,34076	— 45
30°	1,33017	1,33071	— 54	1,33932	1,33982	— 50

§ 6. Voor die vloeistoffen, welke in tabel II een negatieve afwijking vertoonden, blijkt hetzelfde ook uit tabel IV. Vergelijkt men echter de verschillen *waarneming—berekening*, die wij voor A, n_α en n_γ gevonden hebben, dan blijkt het, dat de bedoelde negatieve afwijkingen des te grooter worden, naarmate men den brekingsindex voor een kleinere golflengte beschouwt. In overeenstemming hiermede vertoont ook glycerine in II een zeer kleine positieve, maar in IV een negatieve afwijking. Wij besluiten dus, dat bij glycerine, alcohol, chloorzinkoplossing en zwavelkoolstof oorzaken bestaan, waardoor de brekingsindex bij verwarming minder afneemt dan volgens de vergelijking (C) het geval zou moeten zijn en dat deze oorzaken bij de meest breekbare stralen den grootsten invloed hebben.

Maar zelfs bij het water schijnen dezelfde oorzaken te bestaan. Want de afwijking bij deze vloeistof is wel ook in tabel V positief gebleven, maar wordt des te kleiner naarmate de golflengte afneemt.

Het verdient hierbij opgemerkt te worden, dat de afwijking bij het water werkelijk negatief wordt, wanneer men de verandering beschouwt, die de brekingsindex door samendrukking ondergaat. JAMIN * kwam tot het resultaat, dat die verandering de formule (A) volgt. Wanneer hij namelijk uit de waargenomen verandering van n door die formule den coëfficient van samendrukbaarheid μ (voor 1 atmospheer) afleidde, verkreeg hij voor gewoon gedestilleerd water $\mu = 0,0000500$, voor luchtvrij water $\mu = 0,0000511$, terwijl volgens GRASSI voor 0° C. $\mu = 0,0000504$ is. Intusschen doet MASCART †, die de proeven van JAMIN herhaald heeft, opmerken, dat de temperatuur bij die proeven waarschijnlijk ongeveer 15° is geweest en dan is volgens GRASSI $\mu = 0,0000471$. MASCART vindt voor de genoemde temperatuur uit zijne optische proeven door middel

* *Ann. de chim. et de phys.* 3 Série, T. 52, p. 163.

† *Pogg. Ann.*, 153, p. 154.

van (A) $\mu = 0{,}0000518$, door (B) $\mu = 0{,}0000453$, terwijl de formule (C), op die proeven toegepast, $\mu = 0{,}0000401$ oplevert. Men ziet hieruit, hoe in elk geval bij samendrukking de brekingsindex minder varieert, dan volgens onze formule het geval zou moeten zijn.

Terwijl dus het water in negatieve richting van de formule (C) afwijkt, wanneer de dichtheid bij constante temperatuur verandert, schijnt het, dat de positieve afwijking, die wij in de tabellen III en V opmerkten, op rekening van de temperatuursverandering moet gesteld worden. Ik bedoel daarmeê, dat waarschijnlijk die afwijkingen niet rechtstreeks aan een verandering in dichtheid zijn toe te schrijven, maar veeleer aan een verandering, die de moleculen bij temperatuursverhooging ondergaan, in dien zin, dat de grootheid $\varkappa$ (II, § 2) voor eene molecule niet constant is, maar bij verwarming afneemt. Voor deze opvatting pleit ook het gedrag van water beneden 4^0 C. Jamin * heeft aangetoond, dat ook dan de brekingsindex afneemt bij verwarming, ofschoon deze hier van een inkrimping vergezeld gaat. Nu kan men zich zeer goed voorstellen, dat de boven bedoelde verandering der moleculen ook beneden 4^0 plaats heeft, zoodat ook dan $\varkappa$ bij verwarming afneemt. Het is dan verder zeer goed mogelijk, dat deze omstandigheid van meer invloed op den brekingsindex is dan de inkrimping, en zoodra dit het geval is zal bij verwarming, ondanks die inkrimping, de brekingsindex afnemen.

Eindelijk merken wij nog op, dat de positieve afwijking bij het water boven 20^0 bijna ophoudt, zooals hieruit blijkt, dat in de tabellen III en V de verschillen *waarneming—berekening* voor 30^0 slechts weinig grooter zijn dan voor 20^0.

§ 7. Verschillende natuurkundigen hebben een zoo groot aantal bepalingen der brekingsindices van vloeistoffen verricht, dat wij nog slechts eenige dier metingen als voorbeeld kunnen aanvoeren. Men vindt in tabel VI de uitkomsten van eenige berekeningen naar aanleiding van metingen van Hoek en Oudemans †, Dale en Gladstone § en Landolt **. In de eerste kolom is behalve de naam der vloeistof ook die der waarnemers en tusschen haakjes de lijn van het spectrum aangegeven. De als berekend opgegeven waarden van den brekingsindex zijn door de formule (C) afgeleid uit den brekingsindex voor de laagste der opgegeven temperaturen. Bij die afleiding is gebruik gemaakt van de door Kopp †† bepaalde dichtheden.

* *Comptes rendus*, 43, p. 1191.

† Hoek et Oudemans, *Recherches sur la quantité d'éther contenue dans les liquides*, p. 66.

§ Dale en Gladstone, *Phil. Trans.* 1863.

** Landolt, *Pogg. Ann.* 117, p. 353; 122, p. 545.

†† Wüllner, *Experimentalphysik*, Bd. III, p. 79 (derde uitgave).

VI.

		T	Brekingsindex. Waargen.	Ber.	Waarn. — ber.
Azijnzuur aethyl H en O (D)		10°	1,3776		
		40°	1,3621	1,3608	13
		70°	1,3465	1,3433	32
Benzoëzuur aethyl H en O (D)		10°	1,5107		
		50°	1,4921	1,4904	17
		100°	1,4688	1,4641	47
Zuringzuur aethyl H en O (D)		10°	1,4151		
		60°	1,3927	1,3904	23
		110°	1,3697	1,3646	51
Mierenzuur aethyl D en G	(A)	22°	1,3540		
		31°	1,3500	1,3491	9
		40°	1,3456	1,3441	15
	(H)	22°	1,3694		
		31°	1,3652	1,3642	10
		40°	1,3608	1,3590	18
Joodaethyl D en G	(A)	23°,5	1,5003		
		36°	1,4918	1,4915	3
		48°	1,4841	1,4828	13
	(H)	23°,5	1,5420		
		36°	1,5326	1,5323	3
		48°	1,5250	1,5227	23
Benzol D en G	(A)	10°,5	1,4879		
		23°	1,4806	1,4794	12
		39°	1,4703	1,4686	17
	(H)	10°,5	1,5305		
		23°	1,5225	1,5211	14
		39°	1,5108	1,5091	17

		T.	Brekingsindex. Waargen.	Ber.	Waarn. — ber.
Propionzuur L	(H_α)	18°	1,3854		
		24°	1,3830	1,3826	4
		28°	1,3814	1,3807	7
	(H_γ)	18°	1,3960		
		24°	1,3936	1,3931	5
		28°	1,3920	1,3911	9
Amylalcohol L	(H_α)	16°	1,4073		
		20°	1,4057	1,4056	1
		26°	1,4034	1,4030	4
	(H_γ)	16°	1,4186		
		20°	1,4169	1,4168	1
		26°	1,4143	1,4142	1
Aldehyde L	(H_α)	6°	1,3379		
		12°	1,3344	1.3343	1
		20°	1,3298	1,3293	5
	(H_γ)	6°	1,3480		
		12°	1,3443	1,3442	1
		20°	1,3394	1,3391	3
Bittere amandelolie L	(H_α)	16°	1,5412		
		20°	1,5392	1,5388	4
		26°	1,5361	1,5353	8
	(H_γ)	16°	1,5796		
		20°	1,5775	1,5770	5
		26°	1,5742	1,5732	10

Men ziet, hoe ook bij al deze vloeistoffen de brekingsindex bij verwarming minder afneemt, dan volgens de formule (C) het geval zou moeten zijn. Met uitzondering van amylalcohol en aldehyde zijn ook weer die negatieve afwijkingen des te grooter, naarmate de golflengte kleiner wordt.

Wij moeten eindelijk nog over het gedrag der vaste lichamen spreken. FIZEAU * was de eerste, die de veranderingen bepaalde, welke de brekingsindex daarvan door verwarming ondergaat. Hij vond, dat bij glas van St. Gobain, bij gewoon en zwaar flintglas de brekingsindex voor het natriumlicht bij verwarming toeneemt. Bij vloeispaath neemt de brekingsindex bij een temperatuursverhooging af, terwijl die van kroonglas zoo weinig verandert, dat het niet is uit te maken, of hij af- of toeneemt. De uitkomsten van FIZEAU zijn uit de waarneming der interferentiestreepen (ringen van NEWTON) bij dikke platen afgeleid, maar zij zijn later ook door rechtstreeksche metingen, o. a. door VAN DER WILLIGEN † bevestigd. Het meest uitgebreide onderzoek echter, dat mij over dit onderwerp bekend is, is dat van BAILLE §). Deze natuurkundige bepaalde rechtstreeks den brekingsindex voor verschillende lijnen van het spectrum bij ver uiteenliggende temperaturen. Van alle onderzochte lichamen vertoonden alleen vloeispaath, kalialuin en klipzout voor alle lichtstralen een brekingsindex, die bij temperatuursverhooging afneemt, op dezelfde wijze als dit bij de vloeistoffen het geval is.

Beschouwen wij vooreerst het vloeispaath. BAILLE verkreeg voor dit lichaam de volgende brekingsindices:

Lijn van het spectrum.	14°.	99°.	Verschil.
Li (α) (in de nabijheid van B)	1,432575	1,431559	— 1016
H_α (samenvallende met C)	1,432651	1,431639	— 1012
Na („ „ D)	1,433272	1,432288	— 984
H_β („ „ F)	1,436033	1,435175	— 858
Lijn van 't koperspectrum nabij G	1,438994	1,438287	— 707

Volgens BAILLE bedraagt de fout in de brekingsindices hoogstens 5 eenheden der laatste decimaal. Hoe groot de fout in de bepaling der hoogste temperatuur kan geweest zijn is moeilijk aan te geven. De vergelijking van de hier meêgedeelde uitkomsten met die van FIZEAU valt vrij bevredigend uit. Voor

---

* FIZEAU, *Pogg. Ann.* 119, p. 87.

† VAN DER WILLIGEN, *Archives du Musée Teyler*, Vol. I, p. 68, Vol. II, pp. 191, 192, 195 197, 198.

§ BAILLE, *Recherches sur les indices de réfraction* (*Thèse prés. à la Fac. des Sc. de Paris*, 1867).

de natriumlijn is volgens BAILLE de vermindering van den brekingsindex voor 1° 0,0000120. FIZEAU vond voor die vermindering uit zijne eerste proeven 0,0000136 en, zooals BAILLE opgeeft, uit latere proeven 0,0000110.

Daar volgens KOPP de lineaire uitzettingscoëfficiënt van vloeispaath 0,0000207 is *, kan men uit den brekingsindex voor 14° dien voor 99° door middel der formule (C) berekenen. Dit geeft voor de vijf gebezigde lichtstralen de volgende uitkomsten:

	Waargenomen.	Berekend.	Waarneming—berekening.
Li_α	1,43156	1,42997	159
H_α	1,43164	1,43004	160
Na	1,43229	1,43066	163
H_β	1,43518	1,43340	178
Cu	1,43829	1,43634	195

De afwijkingen zijn dus weer negatief, evenals wij dit bij alle vloeistoffen met uitzondering van water gevonden hebben en zij zijn ook weer des te grooter, naarmate de golflengte kleiner wordt. Evenals bij de vloeistoffen moeten dus ook bij het vloeispaath oorzaken bestaan, die, alleen werkende, den brekingsindex bij vermindering van dichtheid zouden doen toenemen en die des te meer invloed uitoefenen, naarmate men licht van een kleinere golflengte beschouwt. Deze oorzaken worden ook nog bij het vloeispaath overwogen door die, welke bij de afleiding der formule (C) in rekening zijn gebracht, zoodat de brekingsindex nog steeds bij verwarming afneemt, maar toch zijn de negatieve afwijkingen, vergeleken met de waargenomen verandering van n, grooter geworden (zoodat zij zelfs die verandering overtreffen). Dit blijkt ook uit de volgende beschouwing. Volgens de formule (C) zou de brekingsindex voor de meest breekbare stralen het meest moeten afnemen. Dit is bij de vloeistoffen ook het geval, ondanks de negatieve afwijkingen, die juist voor die stralen het grootst worden. Maar bij vloeispaath zijn de afwijkingen reeds zoo groot geworden, dat de brekingsindex voor de meest breekbare stralen juist het minst afneemt.

Dit laatste is volgens de metingen van BAILLE ook voor kalialuin en klipzout het geval. Ik vermoed daarom, dat voor deze lichamen ook al het voor vloeispaath gezegde geldt, maar kan dit niet op de proef stellen, daar mij de uitzettingscoëfficient niet bekend is.

Men kan zich nu zeer goed voorstellen, dat de oorzaken, die, alleen werkende,

* Ik heb deze opgave ontleend aan FIZEAU, t. a. p., p. 111.

den brekingsindex bij een vermindering in dichtheid zouden doen toenemen, geheel de overhand verkrijgen. Werkelijk neemt volgens FIZEAU, VAN DER WILLIGEN en BAILLE bij verschillende soorten van flintglas en volgens den laatsten natuurkundige ook bij kiezelrijk kroonglas (crown chargé de silice), diamant, blende en senarmontiet de brekingsindex bij verwarming toe. Daarbij verdient opgemerkt te worden, dat VAN DER WILLIGEN en BAILLE gevonden hebben, dat die aangroeiing des te grooter is, naarmate de golflengte kleiner wordt. Nu zouden volgens de formule (C) de indices moeten afnemen en wel het meest voor de kleinste golflengten. Voor deze zijn dus wederom de afwijkingen het grootst, geheel in overeenstemming met hetgeen wij bij de vloeistoffen gevonden hebben.

Eindelijk vindt BAILLE voor gewoon en zinkhoudend kroonglas (crown de zinc), dat de brekingsindex voor groote golflengten bij verwarming afneemt, maar dat deze afneming des te kleiner wordt, naarmate men kleinere golflengten beschouwt, om eindelijk in een aangroeiing over te gaan, die dan verder naar de violette zijde van het spectrum toeneemt. Het zal wel overbodig zijn aan te wijzen, hoe ook hier de afwijkingen, wat de richting en de afhankelijkheid van de golflengte betreft, met die bij de vroeger besproken lichamen overeenstemmen.

Juist deze omstandigheid, dat de formule (C) zoowel bij vloeistoffen als bij vaste lichamen op dezelfde wijze van de ervaring afwijkt, schijnt mij er voor te pleiten, dat door die formule het vraagstuk van den samenhang tusschen n en d *gedeeltelijk* juist is opgelost. Maar bij de afleiding van (C) moeten nog omstandigheden zijn verwaarloosd, die op den brekingsindex den reeds meermalen vermelden invloed hebben. Eenige omstandigheden, die hierbij misschien in aanmerking kunnen komen, heb ik in § 2 aangewezen, maar ik zal het thans niet wagen, deze aan een nader onderzoek te onderwerpen.

§ 9. Wij kunnen de formule (C) ook nog op de proef stellen door den brekingsindex van eenige stoffen in vloeibaren en gasvormigen toestand te vergelijken. Ik heb daartoe uit den brekingsindex voor het natriumlicht in den eersten toestand door middel van de formule dien voor den tweeden toestand afgeleid voor het geval, dat de drukking 760 mM. en de temperatuur 0^0 bedraagt. (Voor die dampen, waarbij dit geval niet te verwezenlijken is, hebben de opgegeven brekingsindices de beteekenis, dat men er door (A), (B) of (C) in de onderstelling, dat de wetten van BOYLE en GAY-LUSSAC gelden, den brekingsindex voor werkelijk voorkomende gevallen uit kan afleiden). Zie hier de verkregen uitkomsten.

	Vloeibaar			Gasvormig			
	Dichtheid	n		Dichtheid ten opzichte der lucht	n Waargenomen.		Berekend.
Water	1 (4°)	1,3345 (4°)	WÜLLNER	0,622	1,000261	JAMIN *	1,000249
Zwavelkoolstof	1,2702(15°,6)	1,6308(15°,6)	BADEN POWELL	2 644	1,00150	DULONG	1,00144
Aether.	0,7166(20°)	1 3529 (20°)	LANDOLT	2,580	1,00153	»	1,00151
Zwaveligzuur .	0,4821	1 3384	KETTELER †	2,216	1,000665 1,000686	» KETTELER	1,000605

Ook bij den overgang van den vloeibaren tot den gasvormigen toestand neemt de brekingsindex hier dus minder af, dan volgens de formule (C) het geval zou moeten zijn.

§ 10. Eindelijk kan men nog voor zwavel en phosphorus de brekingsindices in den vasten toestand vergelijken met die van den damp, welke laatste door LE ROUX § bepaald zijn.

Voor vaste zwavel is de brekingsindex (voor roode stralen) 2,053, de dichtheid 2,065. Daar nu voor zwaveldamp de dichtheid (ten opzichte van de lucht) 6,617 is, volgt uit de formule (C) voor den brekingsindex van den damp (bij 0° en 760 m.M.) 1,0032. Evenzoo vindt men voor phosphorusdamp 1,0020, waarbij voor de dichtheid in vasten toestand 1,823, voor den brekingsindex 2,106 en voor de dichtheid van den damp 4,355 is gesteld.

LE ROUX vindt voor zwavel- en phosphorusdamp resp. $n = 1,001629$ en $n = 1,001364$, zoodat wij hier afwijkingen van de formule (C) zouden hebben in tegengestelde richting als bij de vroeger onderzochte lichamen.

Het komt mij echter voor, dat de uitkomsten van LE ROUX een belangrijke correctie moeten ondergaan. Bij zijne proeven bevond zich nl. binnen een prisma de damp der onderzochte stof, daarbuiten atmospherische lucht, terwijl zoo binnen als buiten atmospherische drukking en dezelfde hooge temperatuur t heerschten. De proeven leverden nu onmiddellijk den brekingsindex N van den ingesloten damp met betrekking tot de omringende lucht op. LE ROUX stelt nu, dat die brekingsindex onafhankelijk van t is, en dus de gevonden waarde ook geldt voor het geval, dat zoowel de lucht als de damp bij een temperatuur van 0° en een drukking van 760 m.M. genomen worden. Door dan

* JAMIN, *Ann. de chim. et de phys.* 3e Série, T. 52, p. 171.

† KETTELER, *Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase.*

§ LE ROUX, *Ann. de chim. et de phys.* 3e Série, T. 61, p. 385.

de bedoelde waarde met 1,000294 (absolute brekingsindex der lucht voor 0^0 en 760 m.M.) te vermenigvuldigen werd het boven opgegeven getal verkregen.

Nu is echter de hier gemaakte onderstelling niet juist. Integendeel kan men uit de formule (B) gemakkelijk afleiden, dat de onderlinge brekingsindex van twee gassen bij een temperatuursverhooging (als de drukking onveranderd blijft) moet afnemen. Ik geloof dan ook, dat men uit de proeven van LE ROUX den gezochten absoluten brekingsindex n_0 van den damp voor 0^0 en 760 m.M. op de volgende wijze moet afleiden.

Zij n_t deze brekingsindex voor t^0 en 760 m.M., n'_t de absolute brekingsindex van de lucht onder dezelfde omstandigheden, dan is

$$\frac{n_t}{n'_t} = N .$$

Verder is, als α den uitzettingscoëfficient van de lucht voorstelt, die bij deze berekening ook voor den damp wordt aangenomen, volgens de formule (B) — of een der formules (A) en (C) —

$$n'_t = 1 + \frac{0,000294}{1 + \alpha t}$$

$$n_t = 1 + \frac{n_0 - 1}{1 + \alpha t}$$

dus, daar de hier voorkomende breuken zeer klein zijn

$$N = 1 + \frac{n_0 - 1,000294}{1 + \alpha t}$$

$$n_0 = 1,000294 + (N - 1)(1 + \alpha t).$$

De door LE ROUX berekende waarde is echter

$$n'_0 = 1,000294\, N = 1,000294 + (N - 1),$$

zoodat

$$n_0 - 1,000294 = (n'_0 - 1,000294)(1 + \alpha t)$$

moet zijn. Stelt men nu, bij gemis aan andere opgaven omtrent de temperatuur, voor t het kookpunt der onderzochte stoffen (resp. 400^0 en 290^0), dan vindt men uit de door LE ROUX opgegeven waarden van n'_0 voor zwavel $n_0 = 1,00359$ en

voor phosphorus $n_0 = 1{,}00250$. De afwijkingen van de door de formule (C) uit den brekingsindex in den vasten toestand berekende waarden hebben derhalve weder dezelfde richting verkregen als bij de vroeger onderzochte lichamen.

Overigens zal men ook op de aldus berekende waarden van n_0 niet te veel moeten vertrouwen, daar het mij twijfelachtig voorkomt, of bij de proeven van Le Roux wel alle lucht in het prisma door damp was vervangen. Hierdoor kan intusschen n_0 slechts te klein uitvallen, zoodat de afwijkingen van onze formule de zooeven gevonden richting behouden.

§ 11. Wij hebben eindelijk nog na te gaan, in hoeverre de formule, die wij in de vorige hoofdstukken voor den brekingsindex van mengsels hebben opgesteld, met de werkelijkheid in overeenstemming is. Die formule kan in den volgenden vorm worden geschreven. Wanneer van twee stoffen de brekingsindices n_1 en n_2, de dichtheden d_1 en d_2 zijn en wanneer voor een mengsel, waarvan de gewichts-eenheid uit de hoeveelheden a_1 en a_2 dezer stoffen bestaat, de brekingsindex n en de dichtheid d is, dan is

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d} = a_1\frac{n_1^2-1}{(n_1^2+2)d_1} + a_2\frac{n_2^2-1}{(n_2^2+2)d_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Evenals deze vergelijking bij (C) behoort, behooren bij (A) en (B) de formules

$$\frac{n^2-1}{d} = a_1\frac{n_1^2-1}{d_1} + a_2\frac{n_2^2-1}{d_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

en

$$\frac{n-1}{d} = a_1\frac{n_1-1}{d_1} + a_2\frac{n_2-1}{d_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Voor gasmengsels zijn n_1, n_2 en n zoo weinig van de eenheid verschillend, dat de beide eerste formules in de derde overgaan, die, gelijk men weet, door de metingen van Biot en Arago bewezen is.

Anders is het met de vloeistoffen gesteld. Wij zullen zien, dat daar de drie formules tot verschillende uitkomsten voeren, die intusschen geen van alle volkomen juist zijn.

Hierbij valt nog iets op te merken. De in de vorige §§ onderzochte veranderingen in den brekingsindex gingen, met een enkele uitzondering, van een temperatuursverhooging vergezeld. Men zou daarom de afwijkingen, die wij tusschen de formule (C) en de ervaring gevonden hebben, aan een verandering der moleculen met de temperatuur kunnen toeschrijven. Was dit juist, dan zou er kans bestaan, dat de formule (C') doorging, wanneer men slechts

n_1, n_2 en n, d_1, d_2 en d alle bij dezelfde temperatuur nam. Blijkt het nu, dat ook dan nog afwijkingen voorkomen, dan is het tevens waarschijnlijk gemaakt, dat men, om tot een geheel juiste theorie te geraken, nog iets anders dan een verandering der moleculen met de temperatuur in rekening zal moeten brengen. Voor het water blijkt dit trouwens reeds uit de proeven over de verandering van den brekingsindex door samendrukking.

§ 12. Ik heb de drie formules (A′), (B′), (C′), vooreerst weer vergeleken met de metingen van WÜLLNER, waarvan de uitkomsten in tabel I zijn vereenigd. In tabel VII vindt men naast de waargenomen waarde van A voor 20° C. voor elk mengsel die aangegeven, welke uit de waarde van A (bij dezelfde temperatuur) voor de beide gemengde stoffen door middel van de formules (A′), (B′), (C′) zijn afgeleid.

VII.

	Waar-genomen.	Berekend volgens (A′).	Waarn. — ber.	Berekend volgens (B′)	Waarn. — ber.	Berekend volgens (C′).	Waarn. — ber.
Glycerine *a*	1,4387						
1 Water; 3,7 glycerine *a*	1,4127	1,4136	— 9	1,4133	— 6	1,4127	0
1 〃 ; 1 〃	1,3780	1,3790	— 10	1,3782	— 2	1,3773	+ 7
1 〃 ; 0,5 〃	1,3589	1,3598	— 9	1,3591	— 2	1,3583	+ 6
Water	1,3241						
Glycerine *b*	1,4489						
1 Alcohol *a*; 4 glycerine *b* .	1,4275	1,4273	+ 2	1,4275	0	1,4276	— 1
1 〃 ; 2 〃 .	1,4134	1,4129	+ 5	1,4130	+ 4	1,4129	+ 5
1 〃 ; 0,998 〃 .	1,3967	1,3962	+ 5	1,3962*	+ 5	1,3961	+ 6
1 〃 ; 0,4997 〃 .	1,3832	1,3834	— 2	1,3838	— 6	1,3841	— 9
Alcohol *a*	1,3532						
Verzadigde oploss. van chloorzink .	1,4888						
1 Water; 3,997 verz. oplossing van chloorzink	1,4426	1,4438	— 12	1,4430	— 4	1,4420	+ 6
1 〃 ; 1,996 verz. oplossing van chloorzink	1,4167	1,4168	— 1	1,4155	+ 12	1,4142	+ 25
1 〃 ; 0,9998 verz. oplossing van chloorzink	1,3896	1,3901	— 5	1,3889	+ 7	1,3878	+ 18
Zwavelkoolstof.	1,5864						
1 Alcohol *b*; 3,955 zwavelkoolstof .	1,5135	1,5202	— 67	1,5160	— 25	1,5111	+ 24
1 〃 ; 2,12836 〃 .	1,4792	1,4876	— 84	1,4824	— 32	1,4768	+ 24
1 〃 ; 1,03111 〃 .	1,4383	1,4463	— 80	1,4413	— 30	1,4361	+ 22
Alcohol *b*	1,3534						

* WÜLLNER geeft hiervoor 1,3966 op.

Tabel VIII levert op dezelfde wijze een vergelijking van de formule (C') met de metingen voor de stralen H_α en H_γ.

VIII.

	n_α			n_γ		
	Waargenomen.	Berekend.	Waarn. — ber.	Waargenomen.	Berekend.	Waarn. — ber.
Glycerine *a*	1,4479			1,4597		
1 Water; 3,7 glycerine.	1,4216	1,4214	+ 2	1,4329	1,4327	+ 2
1 ″ ; 1 ″	1,3861	1,3853	+ 8	1,3965	1,3957	+ 8
1 ″ ; 0,5 ″	1,3665	1,3660	+ 5	1,3764	1,3759	+ 5
Water	1,3312			1,3403		
Glycerine *b*	1,4583			1,4703		
1 Alcohol; 4 glycerine.	1,4366	1,4365	+ 1	1,4483	1,4480	+ 3
1 ″ ; 2 ″	1,4219	1,4216	+ 3	1,4330	1,4327	+ 3
1 ″ ; 0,998 ″	1,4049	1,4044	+ 5	1,4155	1,4152	+ 3
1 ″ ; 0,1997 ″ . . .	1,3912	1,3922	— 10	1,4016	1,4027	— 11
Alcohol (*a* en *b*)	1,3607			1,3703		
Verzadigde chloorzinkoplossing. .	1,5035			1,5224		
1 Water; 3,997 verz. chloorzinkopl.	1,4551	1,4543	+ 8	1,4710	1,4700	+ 10
1 ″ ; 1,996 ″ ″	1,4279	1,4252	+ 27	1,4423	1,4393	+ 30
1 ″ ; 0,9998 ″ ″	1,3996	1,3976	+ 20	1,4125	1,4101	+ 24
Zwavelkoolstof	1,6185			1,6752		
1 Alcohol; 3,955 zwavelkoolstof. . .	1,5377	1,5348	+ 29	1,5790	1,5754	+ 36
1 ″ ; 2,12836 ″ .	1,5000	1,4969	+ 31	1,5341	1,5304	+ 37
1 ″ ; 1,03111 ″ .	1,4545	1,4519	+ 26	1,4804	1,4773	+ 31

Uit tabel VII blijkt, zooals reeds werd opgemerkt, dat geen der drie gebezigde formules geheel juist is, daar toch tusschen den waargenomen en den berekenden brekingsindex voor de mengsels in de vierde, soms reeds in de derde decimaal verschillen optreden. Alleen bij een ruwe benadering kan men, zooals ver-

schillende natuurkundigen dit gedaan hebben, de empirische formule (B′) aannemen, maar men kan dan ook nagenoeg even goed onze theoretische formule (C′) laten gelden en dat zoowel voor oneindig lange als voor kleinere golflengten.

De afwijkingen, die de formule (C′) van de werkelijkheid vertoont, zijn niet meer aan zulk een eenvoudigen regel onderworpen, als die, welke wij vroeger bij het bespreken der formule (C) aantroffen en men kon dit ook niet verwachten, daar de vermenging van twee stoffen een veel ingewikkelder verschijnsel is, dan de dichtheidsverandering van éene stof. Intusschen verdient het opmerking, dat, blijkens de tabellen VII en VIII de afwijkingen des te grooter worden, naarmate men lichtstralen met een kleinere golflengte beschouwt. (Alleen een paar mengsels van alcohol en glycerine maken hierop een uitzondering, maar men kan misschien op de kleine veranderingen, die de bedoelde afwijkingen hier bij verandering der golflengte ondergaan, slechts weinig staat maken). En deze omstandigheid geeft eenigen steun aan het vermoeden, dat de afwijkingen, die zich bij de formule voor de mengsels voordoen, aan dezelfde of dergelijke oorzaken moeten worden toegeschreven, als de vroeger besproken negatieve afwijkingen van de formule (C).

§ 13. Eindelijk heb ik de formule (C′) nog vergeleken met eenige bepalingen van VAN DER WILLIGEN voor mengsels van zwavelzuur en water, alcohol en water en voor oplossingen van chloorcalcium, chloornatrium en chloorammonium. Ik heb daartoe door middel van de genoemde formule uit den brekingsindex van water en van het mengsel met het grootste gehalte aan zwavelzuur, alcohol, enz., dien der andere mengsels afgeleid. Stelt men b. v. de grootheid $\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}$ voor water door k_1, voor watervrij SO_4H_2 door k_2 en voor eenig mengsel van beide stoffen door k voor, dan is, volgens (C′), wanneer dit mengsel p pCt. SO_4H_2 bevat

$$k = \left(1 - \frac{p}{100}\right) k_1 + \frac{p}{100}\, k_2 = k_1 + Cp \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wanneer men $\frac{k_2 - k_1}{100} = C$ stelt. Deze grootheid heeft nu voor alle mengsels van zwavelzuur en water dezelfde waarde. Om die te bepalen kan men gebruik maken van den brekingsindex voor het mengsel met het grootste gehalte aan SO_4H_2 en men kan vervolgens uit de aldus bepaalde waarde van C voor de mengsels k en n afleiden. Op dezelfde wijze kan men ook te werk gaan bij de overige bovengenoemde stoffen. Men vindt in de tabellen IX—XIII de uitkomsten dezer berekeningen voor de lijnen D en H van FRAUNHOFER.

Bij de mengsels van zwavelzuur en water doet zich nog een eigenaardigheid voor. Wanneer men, met water te beginnen, het gehalte aan SO_4H_2 grooter laat worden, dan nemen de brekingsindices eerst toe, om voor een gehalte van 84 à 85 pCt. een maximum te bereiken en vervolgens af te nemen. Ofschoon nu de formule (C′) weer niet volkomen juist blijkt te zijn, voert zij toch, zooals uit tabel IX blijkt, tot een dergelijk verloop van de brekingsindices, hoewel de dichtheid d geen maximum vertoont, maar steeds bij toeneming van p grooter wordt. Het bedoelde verschijnsel hangt hiermeê samen, dat de grootheid $\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$ voor het mengsel met het grootste gehalte kleiner is dan voor water. Het gevolg daarvan is, dat de constante C in de vergelijking (3) negatief wordt, en dat dus k bij toeneming van p steeds afneemt. Nu is echter $n^2 = \frac{1+2kd}{1-kd}$. Neemt dan, bij toeneming van p, k af en d toe, dan is het mogelijk, dat voor een bepaalde waarde van p het product kd en daarmede n een maximum wordt. Dit zou natuurlijk nooit kunnen plaats hebben, wanneer k en d in gelijken zin veranderden.

Ook bij de mengsels van alcohol en water heeft iets dergelijks plaats, als bij die van zwavelzuur en water. Hier is k des te grooter, naarmate het alcoholgehalte toeneemt, maar d neemt daarbij af, zoodat beide grootheden ook hier in tegengestelden zin veranderen.

Overigens moet niet verzwegen worden, dat ook de formules (A′) en (B′) tot een dergelijk verloop van den brekingsindex voeren, als het hier besprokene.

IX.

MENGSELS VAN ZWAVELZUUR EN WATER. $T = 18^0,3$.

Gehalte aan SO_4H_2	Dichtheid.	Straal D. n			Straal H. n		
		Waargenomen.	Ber.	Waarn. — ber.	Waargenomen.	Ber.	Waarn. — ber.
0	0,9987	1,33327			1,34377		
4,46 %	1,0284	1,3386	1,3386	0	1,3494	1,3493	+ 1
23,29 "	1,1669	1,3620	1,3623	— 3	1,3732	1,3735	— 3
38,78 "	1,2920	1,3808	1,3808	0	1,3924	1,3924	0
56,25 "	1,4588	1,4031	1,4042	— 11	1,4151	1,4162	— 11
71,97 "	1,6343	1,4247	1,4266	— 19	1,4370	1,4390	— 20
81,41 "	1,7450	1,4360	1,4384	— 24	1,4484	1,4509	— 25
85,94 "	1,7877	1,4381	1,4400	— 19	1,4504	1,4525	— 21
88,97 "	1,8123	1,4367	1,4398	— 31	1,4488	1,4522	— 34
94,72 "	1,8324	1,43163			1,44347		

De brekingsindices zijn ontleend aan de *Archives du Musée Teyler*, Vol. I, Tabel BB tusschen p. 116 en 117.

De dichtheden zijn berekend uit de gegevens van Tabel C, in hetzelfde deel, tegenover p. 116. Bij die berekening is het gemiddelde genomen van de dichtheden, die elk mengsel bezat vóór en nadat het tot de proeven over de breking gediend had. Alle dichtheden zijn aangegeven met betrekking tot die van water bij 0° C. als eenheid. In de volgende tabellen echter is als eenheid de dichtheid van water bij 4° C. genomen. Voor de dichtheid van het water zelf is, zoo in Tabel IX, als in alle volgende, gebruik gemaakt van de opgaven van JOLLY (WÜLLNER, *Experimentalphysik* III, p. 72).

X.

MENGSELS VAN ALCOHOL EN WATER. $T = 23^0,0$.

(*Archives du Musée Teyler*, Vol. II, Tabel B, tegenover p. 208).

Gehalte aan alcohol.	Dichtheid.	Straal D. n Waargenomen.	Straal D. n Ber.	Straal D. Waarn. — ber.	Straal H. n Waargenomen.	Straal H. n Ber.	Straal H. Waarn. — ber.
0	0,9976	1,33273			1,34319		
38,8 %	0,9352	1,3569	1,3577	— 8	1,3680	1,3694	— 14
53,9 „	0,9033	1,3613	1,3623	— 10	1,3725	1,3743	— 18
86,8 „	0,8243	1,3634	1,3634	0	1,3747	1,3756	— 9
98,9 „	0,7909	1,36070			1,37193		

XI.

OPLOSSINGEN VAN CHLOORCALCIUM. $T = 24^0,0$.

Gehalte aan $Ca\,Cl_2$.	Dichtheid.	Straal D. n Waargenomen.	Straal D. n Ber.	Straal D. Waarn. — ber.	Straal H. n Waargenomen.	Straal H. n Ber.	Straal H. Waarn. — ber.
0	0,9974	1,33264			1,34309		
16,75 %	1,1435	1,3739	1,3729	+ 10	1,3870	1,3856	+ 14
24,38 „	1,2241	1,3963	1,3956	+ 7	1,4106	1,4095	+ 11
31,79 „	1,2970	1,4161	1,4150	+ 11	1,4318	1,4302	+ 16
40,64 „	1,3995	1,44313			1,46035		

De dichtheid en brekingsindices der zoutoplossingen, die in deze tabel en in de beide volgende voorkomen, vindt men in de *Archives du Mus. Teyler*, Vol. II, Tabel E, tegenover p. 236. De brekingsindices van het water zijn ontleend aan de *Archives*, Vol. I, Tabel V (kolom IV), tegenover p. 238.

XII.

OPLOSSINGEN VAN CHLOORNATRIUM. $T = 25^0,75$.

Gehalte aan Na Cl.	Dichtheid	Straal D. n Waargenomen.	Straal D. n Ber.	Straal D. Waarn. — ber.	Straal H. n Waargenomen.	Straal H. n Ber.	Straal H. Waarn. — ber.
0	0,99697	1,33248			1,34293		
8,65 %	1,05794	1,3470	1,3470	0	1,3585	1,3585	0
15,85 "	1,11194	1,3598	1,3597	+ 1	1,3722	1,3721	+ 1
16,61 "	1,11745	1,3612	1,3609	+ 3	1,3738	1,3735	+ 3
20,73 "	1,15019	1,3687	1,3685	+ 2	1,3818	1,3817	+ 1
21,69 "	1,15785	1,3705	1,3703	+ 2	1,3836	1,3836	0
22,78 "	1,16731	1,3726	1,3725	+ 1	1,3862	1,3860	+ 2
26,58 "	1,19845	1,37963			1,39365		

XIII.

OPLOSSINGEN VAN CHLOORAMMONIUM $T = 26^0,30$.

Gehalte aan NH_4 Cl.	Dichtheid.	Straal D. n Waargenomen.	Straal D. n Ber.	Straal D. Waarn. — ber.	Straal H. n Waargenomen.	Straal H. n Ber.	Straal H. Waarn. — ber.
0	0,99684	1,33243			1,34288		
9,72 %	1,02597	1,3510	1,3509	+ 1	1,3629	1,3627	+ 2
11,79 "	1,03202	1,3550	1,3549	+ 1	1,3672	1,3669	+ 3
14,51 "	1,04004	1,3602	1,3601	+ 1	1,3727	1,3726	+ 1
19,58 "	1,05364	1,3695	1,3696	— 1	1,3827	1,3828	— 1
19,68 "	1,05399	1,3698	1,3698	0	1,3830	1,3830	0
24,83 "	1,06757	1,37947			1,39347		

Ook in deze tabellen ziet men de afwijkingen tusschen den waargenomen en den berekenden brekingsindex, zoodra ten minste het bedrag ervan eenigszins aanmerkelijk is, voor de meest breekbare lichtstralen de grootste waarde aannemen, geheel in overeenstemming met het in 't laatst der vorige § uitgesproken vermoeden. Dit vermoeden wordt ook nog hierdoor bevestigd, dat in Tabel IX de berekende waarde van het maximum van den brekingsindex te hoog is, want dit strookt geheel met het vroeger verkregen resultaat, dat de brekingsindex bij vermeerdering der dichtheid minder toeneemt, dan volgens onze theorie het geval zou moeten zijn. Ook bij de mengsels van alcohol en water treden afwijkingen in denzelfden zin op als bij die van zwavelzuur en water, ofschoon in tabel X juist het mengsel met den grootsten brekingsindex geene afwijking voor den straal D vertoont.

Tot dergelijke uitkomsten komt men ook, wanneer men uit de gegevens van tabel XII door middel van de formule (C′) den brekingsindex van vast chloornatrium berekent. Ook voor de oplossingen dezer stof geldt nl. een vergelijking van den vorm (3) en men heeft daarin slechts $p = 100$ te stellen, om de grootheid k voor watervrij chloornatrium te vinden. Kent men dan nog d voor het vaste keukenzout, dan kan men n berekenen. Nu is volgens Hoek en Oudemans * bij 15^0 C. voor het klipzout $d = 2{,}162$ en ik vind hieruit voor den straal D $n = 1{,}596$. Volgens de metingen der genoemde natuurkundigen is echter $n = 1{,}544$, zoodat ook hier de theorie een te groote waarde oplevert, wanneer men uit den brekingsindex eener stof in den eenen toestand den brekingsindex voor een anderen, dichteren toestand afleidt.

§ 14. Door verschillende natuurkundigen is aangetoond, dat men den brekingsindex van een aantal scheikundige verbindingen op dezelfde wijze uit de samenstelling berekenen kan, als dit bij mengsels mogelijk is. Zoo is b. v. door Schrauf eene met (A′) overeenkomstige formule, door Landolt en Dale en Gladstone eene vergelijking, die als een uitbreiding van (B′) is te beschouwen, op verbindingen toegepast. Iets dergelijks kan men nu ook met de formule (E′) van het tweede hoofdstuk beproeven, ofschoon men, nu deze reeds voor mengsels niet geheel juist is, ook bij verbindingen wel in geen geval iets anders dan een ruwe benadering kan verwachten. Ik heb daarom slechts de brekingsindices van een aantal verbindingen van koolstof, waterstof en zuurstof, die door Landolt † onderzocht zijn, met de bedoelde formule vergeleken. Men vindt in

---

* Hoek et Oudemans, *Recherches sur la quantité d'éther contenue dans les liquides*, p. 31.

† Landolt, *Pogg. Ann.* Bd. 122, p. 545 en Bd. 123, p. 595.

tabel XIV naast de door LANDOLT gemeten brekingsindices voor de lijn α van het waterstofspectrum die aangegeven, welke door de formule berekend zijn.

Daarbij ben ik op de volgende wijze te werk gegaan. Wanneer de constante $\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$ voor koolstof, waterstof en zuurstof resp. door k_1, k_2 en k_3 wordt voorgesteld, dan is volgens de formule (E') van het tweede hoofdstuk voor een verbinding, waarvan de gewichtseenheid de hoeveelheden a_1, a_2, a_3 der drie elementen bevat,

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)d} = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Bestaat nu de moleeule dezer verbinding uit p_1 atomen C, p_2 atomen H, p_3 atomen O, dan is het moleculair gewicht

$$P = 12 p_1 + p_2 + 16 p_3$$

en men heeft

$$a_1 = \frac{12 p_1}{P},\; a_2 = \frac{p_2}{P},\; a_3 = \frac{16 p_3}{P}.$$

Stelt men dus $12 k_1 = l_C$, $k_2 = l_H$ en $16 k_3 = l_O$, dan gaat de formule (4) over in

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)d} = \frac{p_1 l_C + p_2 l_H + p_3 l_O}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Ter bepaling van l_C, l_H en l_O leveren nu de waarden van n en d voor elke der onderzochte stoffen een vergelijking op en ik heb de waarden van l_C, l_H en l_O bepaald, die het best aan al die vergelijkingen voldoen. Die waarden zijn

$$l_C = 3{,}045\,;\; l_H = 0{,}796\,;\; l_O = 1{,}830$$

en deze hebben dan verder voor de berekening van n gediend.

Ter vergelijking bevat de laatste kolom van tabel XIV de waarden, die door LANDOLT berekend zijn. Hij bezigde daarbij de formule

$$\frac{n-1}{d} = \frac{p_1 l'_C + p_2 l'_H + p_3 l'_O}{P}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

die als een uitbreiding van (B') kan beschouwd worden en waarin

$$l'_C = 5{,}00\,;\; l'_H = 1{,}30\,;\; l'_O = 3{,}00$$

gesteld werd.

Tabel XIV.

	Formule.	Dichtheid.	Brekingsindex Waargenomen.	Ber. door (5).	Ber. door (6).
Methylalcohol	$C\ H_4\ O$	0,7964	1,328	1,324	1,328
Aethylalcohol.	$C_2\ H_6\ O$	0,8011	1,361	1,361	1,362
Propylalcohol.	$C_3\ H_8\ O$	0,8042	1,379	1,381	1,381
Butylalcohol	$C_4\ H_{10}\ O$	0,8074	1,394	1,395	1,393
Amylalcohol	$C_5\ H_{12}\ O$	0,8135	1,406	1,407	1,403
Mierenzuur	$C\ H_2\ O_2$	1,2211	1,369	1,359	1,361
Azijnzuur.	$C_2\ H_4\ O_2$	1,0514	1,370	1,371	1,371
Propionzuur	$C_3\ H_6\ O_2$	0,9963	1,385	1,389	1,388
Boterzuur.	$C_4\ H_8\ O_2$	0,9610	1,396	1,400	1,397
Valeriaanzuur	$C_5\ H_{10}\ O_2$	0,9313	1,402	1,405	1,402
Capronzuur.	$C_6\ H_{12}\ O_2$	0,9252	1,412	1,416	1,412
Oenanthylzuur	$C_7\ H_{14}\ O_2$	0,9175	1,419	1,423	1,418
Azijnzuur methyl . . . }	$C_3\ H_6\ O_2$	0,9053	1,359	1,350	1,352
Mierenzuur aethyl . . . }		0,9078	1,358	1,351	1,353
Azijnzuur aethyl. . . .	$C_4\ H_8\ O_2$	0,9021	1,371	1,373	1,373
Boterzuur methyl . . .	$C_5\ H_{10}\ O_2$	0,8976	1,387	1,388	1,387
Mierenzuur amyl. . . . }		0,8816	1,396	1,394	1,392
Boterzuur aethyl. . . . }	$C_6\ H_{12}\ O_2$	0,8906	1,394	1,399	1,396
Valeriaanzuur methyl . }		0,8809	1,393	1,394	1,392
Valeriaanzuur aethyl. .	$C_7\ H_{14}\ O_2$	0,8674	1,395	1,397	1,395
Valeriaanzuur amyl . .	$C_{10}\ H_{20}\ O_2$	0,8581	1,410	1,413	1,409
Aldehyde	$C_2\ H_4\ O$	0,7810	1,330	1,318	1,326
Aceton	$C_3\ H_6\ O$	0,7931	1,357	1,350	1,353
Valeral	$C_5\ H_{10}\ O$	0,7995	1,386	1,382	1,381
Aethylaether	$C_4\ H_{10}\ O$	0,7166	1,351	1,346	1,349
Azijnzuur anhydride . .	$C_4\ H_6\ O_3$	1,0836	1,388	1,393	1,391
Aethyleenalcohol. . . .	$C_2\ H_6\ O_2$	1,1092	1,425	1,433	1,426
Glycerine	$C_3\ H_8\ O_3$	1,2615	1,471	1,488	1,471
Melkzuur	$C_3\ H_6\ O_3$	1,2427	1,439	1,448	1,439

In deze tabel vertoonen de door (5) berekende waarden groote afwijkingen van de waargenomene, zoo groote zelfs, dat de empirische formule 6) tot betere uitkomsten voert. De richting der afwijkingen komt intusschen wederom met die overeen, welke wij vroeger in verschillende gevallen gevonden hebben. Want over het geheel levert onze formule in tabel XIV de kleine indices nog te klein en de groote te groot op, hetgeen overeenstemt met de omstandigheid, dat onze theorie bij verandering van dichtheid tot een te groote verandering van den brekingsindex voert.

Men kan eindelijk nog beproeven, uit de brekingsindices der verbindingen die van de elementen C, H en O in vrijen toestand af te leiden. Zoo zou b. v. volgens de hier ontwikkelde theorie voor koolstof, als d de dichtheid is, $n^2 = \dfrac{1 + \frac{1}{6} l_C d}{1 - \frac{1}{12} l_C d}$ moeten zijn. Berekent men nu op deze wijze den brekingsindex van diamant, dan leidt men uit den brekingsindex van koolstof bij dichtheden, zooals zij die in de onderzochte verbindingen heeft, dien in een dichteren toestand af, zoodat als de afwijkingen ook hier dezelfde richting als boven zullen hebben de berekende waarde te hoog moet uitvallen. Berekent men daarentegen uit de waarden van l_H en l_O den brekingsindex van vrije waterstof en zuurstof, dan zal men in dat geval te kleine uitkomsten moeten verkrijgen. Werkelijk is een en ander het geval, zooals blijkt uit de volgende getallen.

	Dichtheid.	Brekingsindex. Waargenomen.		Berekend.
Diamant . . .	3,55	2,43	(SCHRAUF)	5,3
Waterstof. . .	0,06927 : 773	1,000138	(DULONG)	1,000107
Zuurstof . . .	1,10561 : 773	1,000272	„	1,000246

Hoewel er dus nog zeer veel ontbreekt aan onze kennis van den samenhang tusschen den brekingsindex en de scheikundige samenstelling geeft de richting der gevonden afwijkingen toch eenigen steun aan het vermoeden, dat, zoodra de oorzaken dier afwijkingen bekend zijn bij de dichtheidsveranderingen van ééne stof en bij de vermenging van meerdere stoffen ook de brekingsindices van de hier onderzochte verbindingen nauwkeuriger zullen kunnen berekend worden.

Bleek het op deze wijze, dat werkelijk de brekingsindex dezer verbindingen op dezelfde wijze uit de samenstelling berekend kan worden als dit bij een mengsel het geval is, dan zou men dit het best kunnen verklaren door aan te nemen, dat evenals in elk deeltje van twee met elkaar gemengde stoffen, zoo ook

in elk atoom eener scheikundige verbinding een electrisch moment kan worden opgewekt.

Het mag intusschen niet verzwegen worden, dat zich bij sommige verbindingen afwijkingen van onze formules voordoen, zooals zij bij mengsels niet worden aangetroffen. Zoo kan men bij gasmengsels de brekingsindices door een der samenvallende formules (A′), (B′), (C′) berekenen, maar dit is niet meer mogelijk bij een aantal verbindingen van gassen, al zijn zij ook zelve gasvormig.

Trouwens, al neemt men aan, dat in elk atoom eener verbinding een electrisch moment kan worden opgewekt, dan behoeft nog de brekingsindex van zulk een lichaam niet dezelfde te zijn, alsof de atomen eenvoudig met elkaâr vermengd waren. Het eerst laat zich dit verwachten in die gevallen, waar de atomen eener molecule vrij ver van elkander staan, op afstanden niet veel kleiner dan de onderlinge afstand der moleculen. Maar zoodra de atomen op zeer kleinen afstand van elkaâr geplaatst zijn, zal men waarschijnlijk eene correctie in rekening moeten brengen, die uit de onderlinge werking der bestanddeelen eener molecule voortvloeit, en natuurlijk met de structuur der laatste ten nauwste moet samenhangen.

Eindelijk is het nog mogelijk, dat ook positieve of negatieve electriciteit van het eene atoom op het andere kan overgaan, of dat de reeds met positieve of negatieve electriciteit toegeruste atomen (men denke aan de theorie der electrolyse) ten opzichte van elkaâr verplaatst worden, en men zal dan ook hiermede bij het onderzoek der lichtbeweging rekening moeten houden.

CONTRIBUTION

À LA FAUNE ICHTHYOLOGIQUE

DE L'ÎLE MAURICE.

(Avec 3 figures).

Aanmerking bij p. 32. Op de volgende bladzijden is de inductieconstante door A, de grootheid, die door (16) werd ingevoerd, door A aangeduid. De laatste letter had ook behooren gebezigd te worden op p.p. 30 en 31 overal, op p. 32 in de vergelijkingen (23) en (26) en in plaats van de laatste A in de vergelijkingen (25).

[illegible]
* „ pantherinum Smith.
* „ variegatum Smith.
* Pseudoscarus aeruginosus Blkr.
* „ spilonotus Kner.
Cheilinus chlorurus Blkr.
„ trilobatus Lac.
Anampses coeruleopunctatus Rüpp.
Platyglossus (Hemitantoga) centriquadrus Blkr.
* Epinephelus Playfairi Blkr.
Epinephelus fasciatus Blkr.
„ merra Bl.
* Scolopsides personatus CV.
* Lutjanus marginatus Blkr.
Sparus laticeps Blkr.
* Cantharus emarginatus CV.
Tetragonoptrus (Linophora) auriga Blkr.
„ (Linophora) Mertensii Blkr.
(Rabdophorus) trifasciatus Blkr.

Tetragonoptrus (Chaetodontops) fasciatus Blkr.
" (Lepidochaetodon) unimaculatus Blkr.
* Parupeneus macronema Blkr.
Eupomacentrus ater Blkr.
Pseudomonopterus (Pterois) volitans Blkr.
* Agriopus melanosoma Blkr.
* Echeneis remora L.
Carangus melampygus CV.
Gnathanodon speciosus Blkr.
Rhombotides matoides Blkr.
" triostegus Blkr.
Acanthurus strigosus Benn.
Balistes (Balistapus) aculeatus Blkr.
Platophrys pantherinus Blkr.
Hemirhamphus far Rüpp.
Carassius auratus Blkr.
Saurida nebulosa Val.
* Paradiodon maculifer Blkr.
* Tetraodon Honckenii Bl.

Les quatorze espèces, marquées d'un asterisque, sont nouvelles pour la connaissance de la faune de Maurice. J'en décris ici quatre; l'Epinephelus Playfayri, qui me paraît identique avec le Serranus Sonneratii Playf. (nec CV); le Pseudoscarus spilonotus Kner, qui n'était connu jusqu'ici que des îles Viti; l'Eupomacentrus ater, qui probablement ne diffère pas du Pomacentrus ater Lién., enrégistré dans le Catalogue of Fishes parmi les espèces douteuses; et enfin l'Agriopus melanosoma, la seule des espèces qui me paraît inédite. J'ajoute encore la figure des trois dernières espèces, et l'énumération de toutes les espéces de poissons actuellement connues de l'île Maurice, au nombre de 471.

Epinephelus Playfayri Blkr.

Epineph. corpore oblongo compresso, altitudine $3\frac{2}{5}$ circ. in ejus longitudine absque, $4\frac{1}{6}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis 2 circ. in ejus altitudine; capite 3 circ. in longitudine corporis absque, $3\frac{3}{5}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{2}{5}$ circ., latitudine capitis $2\frac{2}{5}$ circ. in ejus longitudine; oculis diametro 5 circ. in longitudine capitis, diametro $\frac{3}{5}$ circ. distantibus; linea rostro-frontali convexiuscula; rostro et ossibus suborbitalibus minutissime squamulatis; maxilla antice utroque latere canino curvato, intermaxillari mandibulari longiore; maxilla superiore post oculum desinente, postice leviter squamulato, squamulis vix conspicuis; praeoperculo rotundato margine posteriore non emarginato denticulis numerosis angularibus ceteris non majoribus; suboperculo interoperculoque leviter denticulatis; operculo spinis 3 media ceteris subaequalibus longiore; linea laterali mediocriter et regulariter curvato apice curvaturae anterioris spinae dorsi 8^{ae} opposita; squa-

mis corpore ciliatis, angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 100 circ. infra lineam lateralem in series 90 circ. transversas dispositis; squamis 45 circ. in serie transversa basin pinnae ventralis inter et pinnam dorsalem, 8 vel 9 lineam lateralem inter et spinam dorsi 6^m vel 7^m; squamis regione scapulo-postaxillari squamis mediis lateribus paulo majoribus; cauda parte libera paulo breviore quam postice alta; pinna dorsali spinosa spinis mediocribus validis anterioribus 2 ceteris brevioribus sequentibus postrorsum longitudine vix accrescentibus posticis $2\frac{1}{2}$ circ. in altitudine corporis, membrana inter singulas spinas sat profunde incisa non lobata; dorsali radiosa dorsali spinosa altiore radiis longissimis 2 et paulo in altitudine corporis; pectoralibus obtusis capite absque rostro paulo brevioribus sat longe ante analem desinentibus; ventralibus acutiuscule rotundatis capitis parte postoculari paulo brevioribus, caudali obtusa rotundata pectoralibus paulo breviore; anali spina media spina postica conspicue fortiore et longiore oculo duplo fere longiore, parte radiosa dorsali radiosa non humiliore; colore corpore fuscescente-rubro vel fusco; capite lateribus ocellis parvis confertissimis aureis quasi reticulato pinnis nigro marginatis; ventralibus aurantiacis dimidio apicali fuscis; pinnis ceteris fuscis; dorsali spinosa superne dilutiore; dorsali radiosa et anali ocellis sat numerosis aureis et vitta extramarginali auriantiaca.

B. 7. D. 9/15 vel 9/16. P. 2/16. V. 1/5. A. 3/9 vel 3/10. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Serranus Sonnerati* Playf., Fish. Zanzib. p. 3 tab. 3 fig. 1? (nec CV. nec. Day).

Hab. Mauritius.

Longitudo speciminis descripti 152'''.

Rem. Par la physionomie et par la couleur du fond du corps et des nageoires l'espèce est voisine de l'Epinephelus argus, mais elle a le corps moins trapu, le profil plus convexe, la ligne latérale moins fortement et plus régulièrement courbée, les petits ocelles de la tête beaucoup plus nombreuses. Je n'y vois pas de vestiges des ocelles bleus qui ornent dans l'argus le corps, les nageoires paires et la caudale.

Si le Serranus Sonneratii des Fishes of Zanzibar est en effèt de la même espèce, il est à noter que la description de M. Playfair ne parle que de 85 écailles dans la ligne latérale et d'un bord préoperculaire faiblement échancré. Il y est dit aussi que le sousopercule et l'interopercule sont „entire" que les pectorales atteignent l'anale, que la 2e épine anale n'est que „scarcely stronger" que la troisième, etc. — La figure montre un poisson à corps plus trapu et à profil moins convexe mais va au reste assez bien à l'individu que j'ai devant moi.

Pseudoscarus spilonotus Kner, Ueb. n. Fisch. Mus. Godeffr., Sitzb. K. Ak. Wiss. LVIII p 31; IV Folg. n. Fisch. Mus. Godeffr. ib. p. 352 tab. 9 fig. 26. — Fig.

Pseudoscar. corpore oblongo compresso, altitudine 3¾ circ. in ejus longitudine; latitudine 2¼ circ. in ejus altitudine; capite acutiusculo 4 circ. in longitudine corporis; altitudine capitis 1 et paulo, latitudine capite 2 fere in ejus longitudine; oculis superis, diametro 5½ circ. in longitudine capitis, diametro ½ circ. a linea frontali remotis, diametris 2 circ. distantibus; linea rostro-dorsali, ore clauso, vertice et rostro convexa, ante oculos concava; rostro convexo absque maxilla superiore oculo minus duplo longiore; naribus distantibus parum conspicuis parvis subaequimagnis; maxillis roseis superficie laevibus margine libero pluricrenulatis angulo oris dente unico mediocri extrorsum spectante, superiore, tota fere, inferiore dimidio basali tantum labiis obtectis; labio superiore interno symphysin versus cum labio externo (rostrali) coalito; squamis genis triseriatis serie superiore ceteris majoribus serie media 7, serie inferiore 4 vel 5 limbum praeoperculi inferiorem tegentibus; squamis lateribus 25 in serie longitudinali; linea laterali singulis squamis maxime arborescente; pinna dorsali spinis flexilibus subaequilongis corpore plus triplo humilioribus, parte radiosa parte spinosa paulo altiore postice angulata; pectoralibus acute rotundatis capite absque maxilla superiore non vel vix brevioribus; ventralibus acute rotundatis capite absque rostro brevioribus; anali dorsali non humiliore postice angulata; caudali capite absque rostro paulo longiore, truncatiuscula angulis acuta; colore corpore superne olivascente lateribus dilutiore, inferne roseo-vel livide-margaritaceo; iride purpurascente margine pupillari aurea; labio rostrali, genis et praeoperculo pulchre viridibus, rostro superne regione interoculari et fronte fusco-violaceis; vittula interoculari margaritaceo convexitate antrorsum spectante; squamis dorso antice et lateribus antice singulis guttulis 2 ad 5 parvis rubris; pinnis imparibus roseis, dorsali superne et anali inferne late coeruleo marginatis; dorsali media altitudine vitta longitudinali viridescente postice ex ocellis contiguis composita, basi spinae 4^{ae} macula nigro-violacea; caudali superne et inferne late violascente vel coerulescente marginata; pectoralibus violascentibus superne profundioribus; ventralibus pallide roseis.

B. 5. D. 9/10 vel 9|11. P. 212. V. 1|5. A. 3|9 vel 3|10. C. 1/11/1 et lat. brev.
Hab. Mauritius.
Longitudo sspeciminu descripti 225‴.

Rem. Cette espèce appartient au groupe du genre à mâchoires roses armées

de dents latérales et couvertes en grande partie par les lèvres, à écailles des joues trisériales et à épines dorsales égales. Je ne puis la rapporter à aucune des espèces connues. Elle se fait aisément reconnaître par les ramifications nombreuses de la ligne latérale, par son marque rostro-frontal noirâtre, par les gouttelettes rouges des écailles de la partie antérieure du tronc, par les joues d'un beau vert, par la bandelette médiane de la dorsale, et la tache noirâtre sur l'écaille recouvrant la base de sa quatrième épine, etc. L'espèce n'était connue jusqu'ici que de la mer de Candavu.

Eupomacentrus (*Brachypomacentrus*) *ater* Blkr. (Fig.)

Eupomac. (Brachypom.) corpore oblongo compresso, altudinine 2 circ. in ejus longitudine absque, $2\frac{2}{3}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; capite $4\frac{1}{3}$ circ. in longitudine corporis; linea rostro-frontali ante oculos convexiuscula; oculis diametro 3 et paulo in longitudine capitis; squamis capite superne usque ante nares extensis; ossibus suborbitalibus conspicue serratis posterioribus squamatis; osse praeorbitali incisura nulla ab ossibus suborbitalibus ceteris distincto, oculi diametro minus duplo humiliore, inferne non emarginato; dentibus maxillis compressis truncato-submarginatis apice contiguis vel subcontiguis; dentibus pharyngealibus multiseriatis apice quam basi non gracilioribus oblique compressis vel rotundatis non curvatis, inferioribus in thurmam triangularem lateribus non emarginatam dispositis, serie posteriore apice obtusis rotundatis; praeoperculo margine posteriore conspicue serrato, limbo posteriore et inferiore alepidoto, supra limbum inferiorem squamis longitudinaliter triseriatis serie superiore ceteris minoribus; operculo spinis 2 parvis distantibus inferiore superiore fortiore; suboperculo edentulo; squamis trunco 28 circ. in serie longitudinali, 13 vel 14 in serie transversa quarum 3 ($2\frac{1}{2}$) supra lineam lateralem; linea laterali sub dimidio dorsalis radiosa posteriore interrupta; pinna dorsali dense squamata dorsali spinosa dorsali radiosa minus duplo longiore, spinis postrorsum longitudine sensim accrescentibus posteriore capitis parte postoculari longiore, membrana interspinali mediocriter incisa; dorsali radiosa dorsali spinosa multo altiore obtusiuscule rotundata radiis 6° et 7° ceteris longioribus; pectoralibus obtusiuscule rotundatis, capite vix brevioribus; ventralibus paulo post basin pectoralium insertis acutis, radio 1°. producto capite longiore; anali dense squamata spina 2ª valida capitis parte postoculari longiore, parte radiosa dorsali radiosa forma et longitudine subaequali sed ea paulo humiliore obtuse rotundata radiis mediis ceteris longioribus; caudali tota fere squamata sat profunde emarginata lobo superiore

acutiusculo inferiore acutiuscule rotundato longiore capite non breviore; colore corpore pinnisque nigricante; iride fusca vel profunde violacea; vittulis vel guttulis corpore pinnisque conspicuis nullis.

B. 6. D. 12/16 vel 12/17. P. 2/17. V. 1/5. A. 2/13 vel 2/14. C. 1/13/1 et lat brev.

Syn. *Pomacentrus ater* (*Pomacentre noir*) Lién., Dix. Rapp. Soc. Hist. nat. Maurit. p. 34.

Hab. Mauritius.

Longitudo speciminis unici 120‴.

Rem. Ne pouvant pas consulter le Rapport cité, je ne puis que supposer que l'espèce décrite doive être celle publiée par Liénard et trouvée à la même localité. M. Günther la place parmi les espèces douteuses, mais l'individu que j'ai devant moi est une forme bien distincte, voisine de l'Eupomacentrus (Brachypomacentrus) albifasciatus.

Agriopus melanosoma Blkr. (Fig.)

Agriop. corpore oblongo compresso, altitudine maxima (spinam ventralem inter et spinam dorsi 7‴) $2\frac{3}{4}$ ad $2\frac{2}{3}$ in ejus longitudine absque, 3 et paulo in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis $2\frac{2}{5}$ circ. in ejus altitudine; capite acuto $3\frac{1}{3}$ ad $3\frac{1}{4}$ in longitudine corporis absque, $3\frac{3}{4}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{1}{3}$ circ., latitudine capitis $2\frac{1}{6}$ circ. in ejus longitudine; oculis diametro $4\frac{3}{4}$ circ. in longitudine capitis, diametro 1 fere distantibus; orbita superne granulosa inferne antice spinula vix conspicua; suborbitalibus regione temporali et suprascapulari granulosis; linea rostro-frontali valde concava; naribus oculi diametro $\frac{1}{2}$ circ. distantibus patulis rotundis inferioribus superioribus conspicue majoribus; rostro acuto oculo longiore; osse praeorbitali oculi diametro altiore, multo altiore quam lato postice granuloso; maxillis subaequalibus, superiore valde protractili, sat longe ante oculum desinente; dentibus maxillis bene conspicuis pluriseriatis gracilibus acutis leviter curvatis; praeoperculo obtuse rotundato dimidio superiore magna parte granuloso, dimidio inferiore radiatim rugoso; operculo subradiatim rugoso; cute trunco spinulis vel granulis nullis sed transversim dense rugosulo-striata; apertura branchiali sat longe supra basin pinnae pectoralis desinente; linea laterali parum curvata e tubulis simplicibus distantibus composita; cauda parte libera duplo circ. longiore quam postice alta; pinna dorsali partem spinosam inter et radiosam sat profunde emarginata; dorsali spinosa dorsali radiosa triplo circ.

longiore, spinis anterioribus praesertim validis, 4^a, 5^a et 6^a ceteris longioribus altitudine corporis vix plus duplo capitis parte postoculari non brevioribus, spinis 2 anticis subaequilongis oculo duplo vel plus duplo longioribus, spinis 2 posticis spina 1^a duplo et spina 5^a triplo circ. brevioribus; dorsali radiosa duplo circ. longiore quam alta, obtuse rotundata; pectoralibus et ventralibus acutiuscule rotundatis, pectoralibus ventralibus paulo longioribus capite absque operculo non brevioribus; anali aeque alto circ. ac longa obtuse rotundata, dorsali radiosa paulo altiore sed multo breviore radio 1° spina rigida oculo breviore; caudali capite duplo circ. breviore; caudali capite duplo circ. breviore, emarginata angulis rotundata; colore corpore pinnisque nigricante-vel violaceo-fusco; iride violascente-fusca margine pupillari aurea; genis et operculis et regione scapulari maculis aliquot distantibus polymorphis albidis.

B. 5. D. 18 12 vel 18/13 (bifid.). P. 9 (omn. simpl.) V. 1/5 (bifid.). A. 3/5 bifid./1. C. 1/10 bifid./1 et lat. brev.

Hab. Mauritius.

Longitudo speciminis unici 285‴.

Rem. L'Agriopus de l'île Maurice est le plus voisin de l'Agriopus leucopoecilus Rich., mais dans cette dernière espèce le corps est plus régulièrement ovalaire et le tronc varié de taches blanchâtres et foncées, les nageoires n'y sont pas non plus uniformément coloriées, la première épine dorsale n'est pas plus longue que l'oeil et mésure deux fois dans la seconde épine, les épines dorsales postérieures sont relativement plus hautes, les pectorales composées de huit rayons, l'anale sans épine osseuse, etc.

Les Agriopus doivent former, dans la famille des Scorpénoïdes, une sousfamille, caractérisée par la fente branchiale ne s'étendant pas jusqu'à la base de la pectorale et separée par conséquent par un isthme très large de celle du côté opposé. La diagnose de la famille doit donc être modifiée par rapport à la nature de l'orifice branchial.

La sousfamille ne comprend que les espèces, au nombre de huit, décrites jusqu'ici comme des Agriopus, mais qui probablement appartiennent à deux ou trois genres.

Le genre Gnathanacanthus me paraît le plus voisin des Agriopus, mais appartient aux vrais Scorpéniformes par sa fente branchiale se continuant sous la gorge.

Énumération des espèces de poissons actuellement connues de l'île Maurice.

Carcharioidei.

1. Cynocephalus (Scoliodon) acutus Blkr = Carcharias (Scoliodon) acutus MH.
2. Triaenodon obesus MH.

Lamnoidei.

3. Alopecias vulpes Bp.

Scyllioidei.

4. Scyllium africanum MH.
5. „ pantherinum Smith = Scyllium africanum var. pantherina Günth.
6. „ variegatum Smith = Scyllium africanum var. variegata Günth.

Centrophoroidei.

7. Euprotomicrus Labordii Gill.. Günth. = Laemargus Labordii. MH.
8. Tristius brasiliensis Gill, Günth. = Scymnus brasiliensis QG = Leius ferox Kner.

Torpedinoidei.

9. Narcacion marmoratus Blkr = Torpedo marmorata Rud.
10. „ fuscomaculatus Blkr = Torpedo fuscomaculata Pet.

Rajoidei.

11. Dasybatis asterias Blkr = Raja asterias L.
12. Leiobatis polylepis Blkr = Trygon polylepis Blkr.
13. Taeniura Meyeni MH.

Myliobatidoidei.

14. Aetobatis narinari MH.
15. Dicerobatis Kuhlii Günth. = Cephaloptera Kuhli MH.

Scaroidei.

16. Scarichthys auritus Blkr. = Scarus naevius CV.
17. „ coeruleo-punctatus Blkr.
18. Callyodon viridescens Rüpp.
19 Pseudoscarus ghobban Günth. = Scarus ghobban Forsk.
20. „ aeruginosus Blkr = Scarus aeruginosus CV.
21. „ maculiceps Peters.
22. „ capitaneus Günth. = Scarus capitaneus CV.
23. „ caudofasciatus Günth.
24. „ cyanescens Blkr = Scarus maculosus Lac.

25. Pseudoscarus maculosus Günth. = Scarus maculosus Lac.
26. „ harid Günth = Pseudoscarus mastax Blkr.
27. „ pyrrhostethus Blkr = Scarus pyrrhostethus Rich.
28. „ pulchellus Blkr = Scarus pulchellus Rüpp.
29. „ scaber Blkr. = Scarus scaber CV.
30. „ spilonotus Kner.
31. „ himbawensis Blkr? = Scarus erythrodon CV.
32. „ taeniurus Blkr = Scarus taeniurus CV.
33. „ variegatus Blkr = Scarus variegatus CV.
34. „ venosus Blkr. — Scarus venosus CV.

Labroidei.

35. Choerops robustus Blkr. = Xiphochilus robustus Günth.
36. Pteragogus taeniops Pet.
37. Trochocopus opercularis Günth.
38. Cossyphus axillaris CV. = Labrus axillaris Benn.
39. „ atrolumbus CV.
40. „ anthioides Günth. = Crenilabrus anthioides Benn. = Cossyphus zosterophorus Blkr.
41. „ bilunulatus CV.
42. „ diana CV.
43. „ leucosticticus Günth. = Labrus leucosticticus Benn.
44. „ macrurus Günth. = Labrus spilonotus Benn. = Cossyphus maldat CV.
45. Hemigymnus fasciatus Günth. = Tautoga fasciata CV.
46. „ melapterus Günth.
47. Anampses coeruleopunctatus Rüpp.
48. „ diadematus Rüpp. = Anampses lineolatus Benn.
49. „ geographicus CV.
50. „ viridis CV.
51. Gomphosus coeruleus Lac.
52. „ varius Lac. = Gomphosus fuscus CV.
53. Stethojulis strigiventer Günth. = Julis strigiventer Benn.
54. Julis Abhortani CV.
55. „ Commersonii CV. = Julis bicolor CV.
56. „ dorsalis QG = Julis semifasciatus. CV.
57. „ Lamarrii CV.
58. „ trilobata CV. = Julis formosus, quadricolor, aeruginosus CV. = Julis bicatenatus Benn.
59. „ Matthaei CV.

60. Julis umbrostigma Rüpp. = Julis Souleyeti CV.
61. Platyglossus (Platyglossus) marginatus Blkr = Julis annularis K.V.H.
62. „ (Güntheria) scapularis Blkr = Julis scapularis Benn. = Julis Leschenaulti CV.
63. „ (Hemitautoga) centiquadra Blkr = Julis hortulanus, decussatus CV.
64. „ (Halichoeres) chloropterus Blkr = Halichoeres chloropterus Blkr.
65. Hemicoris caudimacula Blkr = Julis caudimacula QG. = Ceris caudimacula Günth.
66. „ cingulum Blkr = Julis cingulum CV.
67. Coris aygula Lac. = Julis coris CV.
68. „ Cuvieri Günth. = Julis Cuvieri Benn. = Julis stellatus CV.
69. „ erythropterus Blkr = Julis erythropterus CV.
70. Hologymnosus semipartitus Blkr = Coris semipartita Günth.
71. „ fasciatus Lac. = Julis annulatus et doliatus CV.
72. Cymolutes praetextatus Günth. = Julis praetextatus Günth.
73. Anampsodax Lienardi Blkr.
74. Labroides dimidiatus Blkr.
75. Cheilio inermis Rich. = Cheilio auratus, cyanochloris, fuscus CV.
76. Cheiliopsis bivittatus Steind.
77. Novaculichthys taeniurus Blkr = Xyrichthys taeniurus CV.
78. Hemipteronotus immaculatus Blkr = Novacula immaculata Val.
79. „ tessellatus Blkr = Novacula tessalata CV.
80. Xyrichthys pavo CV = Xyrichthys pavoninus CV.
81. Epibulus insidiator Cuv.
82. Cheilinus arenatus CV.
83. „ chlorurus Blkr = Cheilinus decacanthus, guttatus Blkr.
84. „ punctatus Benn. = Cheilinus punchilatus CV.
85. „ fasciatus CV.
86. „ radiatus Blkr = Cheilinus Commersonii Benn = Cheilinus diagrammus CV.
87. „ trilobatus Lac. = Cheilinus sinuosus QG.

Percoidei.

88. Priacanthus carolinus CV.
89. „ hanirur CV. = Priacanthus fax CV.
90. Odontanthias borbonicus Blkr = Anthias borbonius CV. = Serranus Telfairi Benn.
92. Aulacocephalus Schlegeli Blkr.
93. Centropristes savonaceus Val.

94. Serranus filamentosus CV. = Serranus mitis Benn. = Anthias filamentosus Günth.
95. Variola louti Blkr. = Serranus punctulatus CV.
96. Epinephelus argus Blkr = Serranus myriaster CV. = Serranus guttatus Pet.
97. „ angularis Blkr = Serranus angularis CV. = Serranus celebicus Blkr.
98. „ miniatus Blkr = Serranus miniatus.
99. „ multinotatus Blkr. = Serranus multinotatus Pet.
100. „ mystacinus Blkr = Serranus mystacinus Poey, Günth.
101. „ cylindricus Blk = Serranus cylindricus Günth.
102. „ erythraeus Blkr = Serranus erythraeus CV.
103. „ fasciatus Blkr = Serranus marginalis, oceanicus CV.
104. „ flavo-coeruleus Blkr = Perca flavopurpurea Benn. = Serranus borbonicus QG.
105. „ formosus Blkr = Serranus formosus CV.
106. „ leopardus Blkr = Serranus spilurus CV. = Serranus zanana CV.
107. „ lutra Blkr = Serranus lutra CV.
108. „ merra Blkr = Serranus faveatus, hexagonatus CV.
109. „ morrhua Blkr = Serranus morrhua CV.
110. „ Playfayri Blkr = Serranus Sonnerati Playf. nec CV.
111. „ Retouti Blkr.
112. „ rivulatus Blkr = Serranus rivulatus CV.
113. „ salmonoides Blkr = Serranus salmonoides CV.
114. „ unicolor Blkr = Serranus unicolor Lién.
115. „ variolosus Blkr. = Serranus variolosus.
116. Paracanthistius maculatus Blkr = Plectropoma maculatum CV.
117. „ melanoleucus Blkr = Plectropoma melanoleucum CV.
118. Grammistes ocellatus Blkr = Grammistes compressus Lich.
119. „ orientalis Bl.Sch.
120. Therapon (Datnia) farna Blkr = Therapon servus CV.
121. Moronopsis caudavittatus Blkr = Dules caudavittatus CV.
122. „ fuscus Blkr = Dules fuscus CV.
123. „ rupestris Blkr = Dules rupestris CV.
124. Amia aurita Blkr = Apogon auritus CV.
125. „ frenata Blkr = Apogon frenatus CV. = Apogon vittiger Benn.
126. „ taeniopterus Blkr = Apogon taeniopterus Benn.
127. „ variegata Blkr = Apogon variegatus Val.
128. „ semiornata Blkr = Apogon semiornatus Pet.
129. Paramia macrodon Blkr = Cheilodipterus octovittatus CV.

130. Pomadesys hasta Blkr = Pristipoma hasta, Commersoni CV.
131. „ argyreus Blkr = Pristipoma argyreum CV.
132. „ punctulatus Blkr = Pristipoma punctulatum Rüpp.
133. Plectorhynchus crassispina Blkr. = Diagramma crassispinum Rüpp.
134. „ gaterina Blkr = Diagramma gaterina CV.
135. „ griseus Blkr. = Diagramma griseum CV.
136. „ orientalis Swns. = Diagramma pica CV.
137. Scolopsis frenatus CV.
138. „ personatus CV.
139. „ phacops Benn.
140. Etelis carbunculus CV.
141. Lutjanus analis Blkr = Diacope analis CV.
142. „ bengalensis Blkr = Diacope octovittata CV.
143. „ duodecimlineatus Blkr = Diacope duodecimlineata CV.
144. „ coeruleovittatus Blkr. = Diacope coeruleovittata CV = Diacope angulus Benn.
145. „ fulviflamma Blkr = Diacope fulviflamma, monostigma CV.
146. „ marginatus Blkr = Mesoprion marginatus CV.
147. „ octovittatus Blkr = Labrus octovittatus Lac.
148. Aphareus furcatus Günth. = Aphareus coerulescens, rutilans CV.
149. Latilus argentatus CV.
150. Gnatodentex aurolineatus Blkr = Pentapus aurolineatus CV = Dentex lycogenis Benn.
151. Gymnocranius griseus Blkr = Dentex griseus Schl.
152. „ rivulatus Klunz. = Dentex rivulatus Rüpp.
153. Dentex filamentosus = Dentex (Heterognathodon) filamentosus Steind.
154. Lethrinus nebulosus CV = Lethrinus centurio, esculentus CV.
155. „ mahsena CV.
156. Sparus bifasciatus Blkr = Chrysophrys bifasciata CV.
157. „ coracinus Blkr = Chrysophrys coracinus CV.
158. „ sarba Forsk = Chrysophrys sarba, chrysargyra CV.
159. „ filamentosus Blkr = Pagrus filamentosus CV.
160. „ laticeps Blkr = Chrysophrys laticeps CV. = Pagrus laticeps Steind.
161. Sargus auriventris Pet.
162. Cantharus emarginatus CV.
163. Caesio coerulaureus Lac.
164. Diapterus oyena Blkr = Gerres oyena CV.
165. „ filamentosus Blkr = Gerres filamentosus CV.

Bogodoidei.

166. Ambassis Commersoni CV. = Ambassis macranthus Blkr.
167. „ gymnocephalus Blkr = Ambassis Dussumieri CV.

Cirrhitoidei.

168. Cirrhites marmoratus Blkr = Cirrhites maculosus Benn = Cirrhitichthys maculatus Günth.
169. Paracirrhites arcatus Blkr = Cirrhites arcatus CV.
170. „ cinctus Blkr = Cirrhites fasciatus Benn. (nec CV.) Cirrhites cinctus Günth.
171. „ Forsteri Blkr = Cirrhites pantherinus CV = Cirrhites Forsteri Günth.
172. ? Cirrhites . . . . Lién.
173. Cirrhites punctatus CV.
174. Oxycirrhites typus Blkr.

Chaetodontoidei.

175. Pimelepterus cinerascens Day = Pimelepterus altipinnis CV. = Pimelepterus tahmel.
176. Platax terra Cuv. = Platax arthriticus, orbicularis CV.
177. „ vespertilio Cuv. = Platax Blochii, Ehrenbergii, guttulatus CV.
178. Tetragonoptrus (Linophora) auriga Blkr = Chaetodon auriga Forsk. = Chaetodon setifer Bl.
179. „ („) Mertensi Blkr = Tetragonoptrus chrysurus Blkr = Chaetodon chrysurus Desj.
180. „ („) vagabundus Blkr = Chaetodon vagabundus L.
181. „ (Rabdophorus) Blackburni Blkr = Chaetodon Blackburni Dess.
182. „ („) trifasciatus Blkr = Chaet. trifasciatus M. Park. = Chaet. vittatus Cuv. = Tetragon. vittatus Bl.
183. „ (Chaetodontops) melanotus Blkr = Chaetod. dorsalis Rwdt. = Tetragon. dorsalis Blkr.
184. „ („) fasciatus Blkr = Chaet. lunula CV. = Tetragonoptrus lunula Blkr.
185. „ („ ??) pulcher Blkr = Chelmo pulcher Steind.
186. „ (Oxychaetodon) falcula Blkr? = Chaet. dizoster CV. = Tetragon. dizoster Blkr.
187. „ („) lineolatus Blkr. = Chaetodon lineolatus CV.
188. „ (Lepidochaetodon) Kleini Blkr = Chaet. Kleini Bl. = Chaet. virescens CV. = Chaet. flavescens Benn.
189. „ („) unimaculatus Blkr = Chaet. unimaculatus Bl.
190. „ (Tetragonoptrus) mitratus Blkr = Chaetodon mitratus Günth.

191. Tetragonoptrus (Tetragonoptrus) miliaris Blkr=Chaetodon guttatissimus Benn.
192. Coradion merlangus Blkr?=Chaet. festivus Desj.=Tetragonoptrus festivus Blkr.
193. Megaprotodon strigangulus Blkr = Chaet. strigangulus Sol. = Tetragon. strigangulus Bl.
194. Hemitaurichthys zoster Blkr = Chaetodon zoster Benn. = Tetragon. zoster Blkr; an. = Hemitaur. polylepis Blkr?
195. Taurichthys macrolepidotus Blkr = Heniochus macropelidotus CV.
196. „ monoceros Blkr = Heniochus monoceros CV.
197. Chelmon rostratus Cuv.
198. Prognathodus longirostris Blkr = Chelmon rostratus CV.
199. Holacanthus . . . . Lién.
200. „ diacanthus Günth. = Holacanthus dux Lac.
201. „ trimaculatus Lac.
202. „ caudovittatus Günth. = Genicanthus caudovittatus Blkr.
203. Acanthochaetodon imperator Blkr = Holacanthus imperator Lac.
204. „ nicobariensis Blkr = Holacanthus nicobariensis Bl.
205. Zanclus cornutus CV.

Pempheridoidei.

206. Pempheris mangula CV. = Pempheris nerogallica CV.

Pseudochromidoidei.

207. Plesiops nigricans Rüpp.

Sciaenoidei.

208. Pseudosciaena? aurata Blkr = Pogonathe doré Comm. = Sciaena? aurata Blkr.

Sillaginoidei.

209. Sillago sihama Rüpp. = Sillago acuta Cuv.

Mulloidei.

210. Upeneus sulphureus CV.
211. „ vittatus CV. = Upeneus bitaeniatus Benn.
212. Mulloides mauritianus Blkr = Upeneus mauritianus Benn.
213. „ flavolineatus Blkr = Upeneus flavolineatus CV.
214. Parupeneus bifasciatus Blkr = Mullus bifasciatus Lac.
215. „ cherserydros Blkr = Mullus cherserydros Lac. = Upeneus oxycephalus Bl.
216. „ cyclostomus Blkr = Upeneus cyclostomus CV. = Upeneus immaculatus Benn?
217. „ cyprinoides Blkr = Upeneus cyprinoides CV.
218. „ luteus Blkr = Upeneus luteus CV.

219. Parupeneus macronema Blkr = Upeneus macronema CV.
220. „ pleurostigma Blkr. = Upeneus pleurostigma Benn. = Upeneus Brandesii Blkr.
221. „ multifasciatus Blkr = Upeneus trifasciatus.

Osphromenoidei.

222. Osphromenus olfax Comm. (introd.).

Cichloidei.

223. Tilapia mossambica Blkr = Chromis mossambicus Pet.

Pomacentrodei.

224. Prochilus chrysogaster Blkr = Amphiprion chrysogaster CV.
225. „ fusciventer Blkr = Amphiprion fusciventer Benn.
226. „ polymnus Blkr = Amphiprion xanthurus CV. = Prochilus xanthurus Blkr.
227. Pomacentrus (Pomacentrus) pavo Lac.
228. „ („) coeruleus QG. an. = Pomacrentrus pavo Lac.?
229. Eupomacentrus (Eupomacentrus) lividus Blkr = Pomacentrus punctatus, scolopsis QG. = Pomacentrus taeniops, pristiger CV.
230. „ (Brachypomacentrus) ater Blkr = Pomocentrus ater Lién.
231. Tetradrachmum arcuatum Cant. = Dascyllus aruanus CV,
232. „ trimaculatum Blkr = Dascyllus unicolor Benn.
233. „ reticulatum Blkr = Pomacentre gros-yeux Lién = Tetrades et Dascyllus xanthosoma Blkr.
234. Glyphidodon (Glyphidodon) coelestinus CV. = Labrus sexfasciatus Lac.
235. „ („) septemfasciatus CV.
236. „ („) sordidus Rüpp. = Glyphidodon gigas Lién.
237. „ („) sparoides CV.
238. „ (Hegastes) Dickii Blkr = Glyphisodon Dickii Lién.
239. Glyphidodontops antjerius Blkr = Glyphidodon antjerius K.V.H.
240. Chromis axillaris Blkr = Heliases axillaris CV.

Berycoidei.

241. Beryx lineatus CV.
242. Holocentrum aurolineatum Lac.
243. „ diadema Lac.
244. „ diploxiphus Günth.
245. „ macropus Günth.
246. „ rubrum Rüpp.
247. „ sammana CV.

248. Holocentrum spiniferum Rüpp. = Holocentrum leo CV.
249. Myripristis axillaris CV.
250. „ hexagonus CV.
251. „ japonicus CV.
252. „ kuntee CV.
253. „ lina CV.
254. „ seychellensis CV.
255. „ vittatus CV.

Scorpaenoidei.

256? Sebastichthys nematophthalmus Blkr = Sebastes nematophthalmus Günth.
257. Parascorpaena mauritiana Blkr = Scorpaena mauritiana CV.
258. Scorpaenopsis gibbosus Blkr — Scorpaena nesogallica CV. = Scorpaenopsis nesogallica Heck.
259. Pseudomonopterus (Pterois) antennatus Blkr = Pterois antennata CV.
260. „ („) kodipungi Blkr = Pterois kodipungi Benn.
261. „ („) volitans Blkr = Pterois volitans CV.
262. „ (Dendrochirus) zebra Blkr = Pterois zebra CV.
263. Amblyapistus taenianotus Blkr = Apistus taenianotus CV. = Tetrarogetaenianotus Günth
264. Minous monodactylus CV.
265. Agriopus melanosoma Blkr.

Crossodermatoidei.

266. Caracanthus unipinna Blkr = Micropus unipinna Gr.

Synanceioidei.

267. Pelor filamentosum CV.
268. Synanceia verrucosa Bl.Schn. = Synanceia brachio CV.

Trigloidei.

269. Corystion orientale Blkr = Dactylopterus orientalis CV.

Syngnathoidei.

270. Hippocampus comes Cant.
271. „ Camelopardalus Biane.
272. „ guttulatus Cuv. = Hippocampus moluccensis Blkr.
273. „ ramulosus Leach. = Hippocampus filamentosus H. Clocq.
274. Doryichthys Valenciennii Günth. = Doryichthys brachysoma Blkr = Choeroichthys Valenciennei Kp. = Choeroichthys brachysoma A. Dum.
275. „ excisus Kp.
276. Syngnathus conspicillatus Jen. = Syngnathus fasciatus Gr. = Syngnathus haematopterus Blkr.

277. Syngnathus pelagicus Osb.
278. Solenognathus polyprion Blkr.

Solenostomatoidei.

279. Solenostomatichthys paradoxus Blkr = Solenostoma paradoxum Lac.
280. „ Bleekeri = Solenostomus Bleekeri A. Dum.

Parapercioidei.

281. Parapercis punctulata Blkr = Percis punctulata CV.
282. Caulolatilus? doliatus Blkr = Latilus doliatus CV.
283. Malacanthus Hoedti Blkr.
284. „ latovittatus QG. = Malacanthus taeniatus CV.

Gobioidei.

285. Culius fuscus Blkr = Eleotris Mauritianus Benn. = Eleotris nigra CV.
286. Sicyopterus lagocephalus Blkr = Sicydium lagocephalus CV.
287. Euchoristopus Koelreuteri Gill. = Periophthalmus Koelreuteri CV.
288. Glossogobius giuris Blkr = Gobius giuris HB.
289. „ filosus Blkr = Gobius filosus CV.
290. Awavus personatus Blkr = Gobius personatus, grammepomus Blkr.
291. „ ocellaris Blkr = Gobius ocellaris Brouss.
292. „ pallidus Blkr = Gobius pallidus CV.
293. „ ? Lienardi Blkr = Gobius coeruleus Lién. = Gobius Lienardi Blkr.
294. „ ? Commersoni Blkr = Gobius niger Lac. = Gobius Commersoni CV.
295. Paragobiodon echinocephalus Blkr = Gobius echinocephalus Rüpp.
296. Gobiodon rivulatus Günth. = Gobius rivulatus Rüpp.
297. Bathygobius coalitus Blkr = Gobius coalitus Benn.
298. „ punctillatus Blkr = Gobius punctillatus, fuscus Rüpp. = Gobius nebulopunctatus CV.
299? „ soporator Blkr = Gobius soporator CV. (habit. maurit. vera?)
300. Amblygobius semicinctus Blkr = Gobius semicinctus Benn. = Gobius papilio, phalaena CV.
301. Gobius rubrotaeniatus Lién.—Gen.?
302. Euchoristopus Koelreuteri Gill. = Periophthalmus Koelreuteri CV.
303. Sicyopterus lagocephalus Gill. = Sicydium lagocephalus CV.

Polynematoidei

304. Trichidion paradiseus Blkr = Polynemus paradiseus L. (nec. Bl.)
305. „ indicus Blkr = Polynemus indicus Shaw.
306. „ plebejus Blkr = Polynemus plebejus Brouss. = Polynemus lineatus Lac.
307. „ sexfilis Blkr. = Polymus sexfilis CV.

Mugiloidei.

308. Mugil axillaris CV.
309. „ coeruleomaculatus Lac.
310. Agonostoma dobuloides Günth. = Nestis dobuloides CV.
311. „ Telfairi Benn. = Nestis cyprinoides CV.

Atherinoidei.

312. Atherina pinguis Lac. = Atherina affinis Benn. = Atherina pectoralis CV.
313. „ punctata Benn.

Sphyraenoidei.

314. Sphyraena Commersonii CV.
315. „ Dussumieri CV.
316. „ obtusata CV.

Scomberoidei.

317. Cybium Commersonii CV.

Xiphoidei.

318. Histiophorus gladius Lac. = Histiophorus indicus CV.

Carangoidei.

319. Caranx crumenophthalmus Lac. = Caranx mauritianus QG.
320. Carangus carangus Blkr = Caranx xanthopygus CV.
321. „ melampygus Blkr = Caranx melampygus CV.
322. „ sansum Blkr = Caranx sansum Rüpp.
323. Gnathanodon speciosus Blkr = Caranx speciosus CV.
324? Nomeus Gronovii Günth. = Nomeus Mauritii CV. = Nomeus maculatus Val.

Coryphaenoidei.

325. Coryphaena hippurus L. = Coryphaena chrysurus Lac.

Echeneoidei.

326. Echeneis remora L.

Lichioidei.

327. Scomberoides sancti Petri Blkr = Chorinemus mauritianus, moadetta, sancti Petri CV.
328. Trachynotus Bailloni CV = Trachynotus quadripunctatus CV.

Psettoidei.

329. Monodactylus argenteus Blkr = Psettus rhombeus CV.

Equuloidei.

330. Leiognathus edentulus Blkr = Equula ensifera CV.
331. „ fasciatus Blkr = Equula fasciata CV.

332. Leiognathus parviceps Blkr = Equula parviceps CV.
333. „ splendens Blkr = Equula splendens, gomarah CV.
334. „ Gazza minuta Blkr = Equula dentex CV.

Aulostomatoidei.

335. „ Aulostoma chinense Lac.

Teuthioidei.

336. Teuthis Abhortani Günth. = Amphacanthus Abhortani CV.
337. „ nebulosa Günth. = Amphacanthus nebulosus QG.
338. „ vermiculata Günth. = Amphacanthus vermiculatus CV.

Acanthuroidei.

339. Acanthurus strigosus Benn.
340. Rhombotides Dussumieri Blkr = Acanthurus Dussumieri CV.
341. „ guttatus Blkr = Acanthurus guttatus Bl.Schn.
342. „ Lamarrii Blkr = Acanthurus Lamarrii CV.
343. „ gahm Blkr = Acanthurus gahm CV.
344. „ leucosternon Blkr = Acanthurus leucosternon Benn. = Acanthurus Delisianus CV.
345. „ matoides Blkr = Acanthurus Blochii, annularis CV. = Acanthurus xanthopterus CV?
346. „ triostegus Blkr = Acanthurus triostegus Bl.Schn.
347. „ ? an Harpurus? lunulatus = Acanthurus lunulatus Lién.
348. „ ? = Acanthurus plagiatus Pet.
349. Harpurus Desjardini Blkr = Acanthurus Desjardinii Benn.
350. „ gemmatus Blkr = Acanthurus gemmatus CV.
351. rhombeus Blkr = Acanthurus rhombeus KM. = Acanthurus flavescens Benn. = Acanthurus scopas, altivelis CV.
352. „ suillus Blkr = Acanthurus suillus CV.
353. „ Rüppelli Blkr = Acanthurus velifer CV. = Acanthurus Rüppelli Günth.
354. Naseus brevirostris CV.
355. „ lituratus CV.
356. „ tuber Comm. = Naseus Vlamingii CV.
357. „ unicolor Lién. = Axinurus dipeltis Val?
358. „ unicornis Günth = Naseus fronticornis CV.
359. „ punctulatus CV.

Balisteoidei.

360. Balistes lima Benn.

361. Balistes (Parabalistes) fuscus Blkr = Balistes fuscus Lac. = Balistes reticulatus Hols. = Balistes (Pseudobalistes) chrysospilus Blkr.
362. „ („) viridescens Blkr = Balistes viridescens Lac.
363. „ (Canthidermis) auromarginatus Blkr = Balistes auromarginatus Benn.
364. „ (Balistapus) aculeatus Blkr = Balistes aculeatus L.
365. „ („) bursa Blkr = Balistes bursa Lac.
366. „ („) cinereus Blkr = Balistes cinereus Benn. = Balistes arcuatus Bl.Schn.
367. „ („) cinctus Blkr = Balistes rectangulus Bl.Schn.
368. „ („) conspicillum Blkr = Balistes conspicillum Bl.Schn.
369. „ („) frenatus Blkr = Balistes mitis Benn.
370. „ („) niger Blkr = Balistes niger du Park = Balistes armatus Lac.
371. „ („) verrucosus Blkr = Balistes verrucosus L.
372. Erythrodon niger Rüpp. = Balistes niger Lac.
373. Leiurus stellatus Blkr = Balistes stellatus Lac.
374. Amanses scopas Blkr = Monacanthus scopas Cuv.
375. Liomonacanthus pardalis Blkr = Monacanthus pardalis Rüpp.
376? Monacanthus Dumerili Holl.
377. „ Freycineti Holl. = Balistes Freycineti Cuv.
378. Pseudomonacanthus hippocrepis Blkr = Monacanthus hippocrepis Holl.
379. Oxymonacanthus longirostris Blkr = Monacanthus longirostris Cuv.
380. Pseudaluteres nasicornis Blkr = Aluteres rhinoceros Holl.

Chironecteoidei.

381. Antennarius bigibbus Günth. = Chironectes tuberosus Cuv. = Antennarius unicornis Benn.
382. „ coccineus Günth. = Chironectes coccineus Less. Garn.
383. „ Commersonii Cant. = Chironectes Commersonii CV.
384. „ hispidus Cant. = Chironectes liphotes CV.
385. „ histrio Günth. = Chironectes scaber Cuv.
386 „ maculatus Desj.
387. „ marmoratus Günth. = Chironectes nesogallicus CV.
388. „ pinniceps Comm.

Blennioidei.

389. Petroskirtes barbatus Pet? = Blennechis à dorsale élevée Lién.
390. „ marmoratus Blkr = Blennechis marbré Lién.
391. Salarias arenatus Blkr? = Salarias striatus QG, CV.
392. „ castaneus CV.

393. Salarias quadricornis CV.
394. " Dussumieri CV.
395. " striatomaculatus Kner.
396. Tripterygion elegans Peters.

Ophioidei.

397. Fierasfer parvipinnis Kp.
398. " acus Brüm.

Pleuronecteoidei.

399. Platophrys (Platophrys) pantherinus Blkr = Rhombus parvimanus Benn.
400. " (") pavo Blkr.
401. Achirus marmoratus Lac. = Pardacherus marmoratus Günth.
402. Solea tubifera Pet.

Chacoidei.

403. Plotosus arab Blkr = Plotosus lineatus CV.

Cyprinoidei.

404. Carassius auratus Blkr = Carassius thoracatus CV. = Cyprinus mauritius Benn. = Cyprinus Maillardi Guich. (introduct).
405. Gen? — Leuciscus nesogallicus CV.

Sauridoidei.

406. Synodus myops Blkr. = Saurus myops Cuv.
407. Saurida (vel Saurus) Saurus à galon rouge Lién.
408. " nebulosa CV. = Saurus à bandes et taches Lién.
409. " tumbil Val.
410. Synodus varius Blkr. = Saurus synodus Val.
411. Myctophum hians Rich. = Scopelus rotatus Les.

Scombresocioidei.

412. Scomberesox saurus Flem. = Scomberesox scutellatus Les. CV.
413. Mastacembelus choram Blkr = Belone crocodilus Les. Cuv.
414? " platurus Blkr = Belone platura Rüpp.
415. Hemirhamphus erythrorhynchus Les CV.
416. " far Rüpp. = Hemirhamphus Commersonii CV.
417. " Georgi CV.
418. " unifasciatus Rang.
419. Exocoetus evolans L.
420. " speculiger CV.

Pseudoclupeoidei.

421. Chanos salmoneus CV. = Chanos arabicus Lac. = Chanos mento CV. = Lutodeira chanos Rüpp.
422. „ Lubina CV.
423. Conorhynchus glossodon Blkr. = Albula bananus CV. = Butirinus glossodontus Rüpp.
424. Elops saurus L. = Elops machnata Forsk.
425. Megalops cyprinoides Blkr. = Elops cyprinoides Gm.

Clupeoidei.

426. Chirocentrus dorab CV.
427. Spratelloides delicatulus Günth. = Clupea delicatula Benn.
428. Stolephorus Commerrianus Lac. = Engraulis Brownii CV.
429. Engraulis brelama CV. = Engraulis nesogallicus Benn.
430. Clupea? mauritiana Benn.
431. Clupea (Harengula) Jussieui Blkr = Clupeonia Jussieui CV.
432. Alosa argyrochloris CV.

Anguilloidei.

433. Muraena mauritiana Blkr = Anguilla mauritiana Benn. = Anguilla Johannae Günth.
434. „ labiata Blkr = Anguilla labiata Pet.

Congeroidei.

435. Conger marginatus Val. = Conger altipinnis Kp.

Ophisuroidei.

436. Leiuranus colubrinus Blkr = Liuranus semicinctus Günth.
437. Pisoodonophis cancrivorus Kp.? = Conger flavipinnatus Benn.
438. Brachysomophis crocodilinus Blkr = Ophisurus crocodilinus Benn.

Gymnothoracoidei.

439. Gymnothorax? aulopterus Blkr = Muraena auloptera De Fil.
440. „ fimbriatus Blkr = Muraena fimbriata Benn. = Gymnothorax isingleenoides Blkr.
441. „ flavimarginatus Blkr = Muraena flavimarginata, bilineata Rüpp.
442. „ isingleena Blkr = Muraena isingleena Rich.
443. „ meleagris Blkr = Muraena meleagris Sh. = Thyrroidea meleagris.
444. „ mauritianus Blkr = Muraena mauritiana Kp. = Muraena flavimarginata Kp.
445. „ pardalis Blkr = Muraena pardalis Schl.
446. „ Petelli Blkr = Muraena nubila Rich. (specim. Maurit.).

447. Gymnothorax pseudothyrsoidea Blkr = Muraena pseudothyrsoidea Blkr.
448. „ Reevesii Blkr = Muraena Reevesii Rich.
449. „ tagenodeta Blkr = Muraena tagenodeta Rich.
450. „ tessellatus Blkr. = Muranae python Kp.
451. Echidna variegata Fost. = Muraena nebulosa Ahl. = Muraena variegata Rich.
452. „ zebra Blkr = Gymnomuraena zebra Shaw = Muraena molendinaris Benn.
453. Gymnomuraena concolor Blkr = Uropterygius concolor Rüpp.
454. „ tigrina Blkr = Ichthyophis tigrinus.

Orthagoriscoidei.

455. Orthagoriscus lanceolatus Lién.

Triodontoidei.

456. Triodon bursarius Reinw.

Tetraodontoidei.

457? Dicotylichthys punctulatus Kp.
458. Paradiodon hystrix Blkr = Diodon hystrix L.
459. „ maculifer Blkr = Diodon maculifer Kp.
460. Canthagaster Valentyni Blkr? = Rhynchotus Gronovii Blkr.
461. Crayracion hispidus Blkr = Tetrodon hispidus Lac.
462. „ immaculatus Blkr = Tetrodon immaculatus Lac. = Tetrodon sordidus Rüpp.
463. „ lineatus Blkr = Tetrodon lineatus Bl.
464. „ nigropunctatus Blkr = Tetrodon nigropunctatus Bl.Schn.
465. „ stellatus Blkr = Tetrodon calamara Rüpp.
466. Tetrodon lagocephalus. L.
467. „ Honckenii Bl.

Ostracinoidei.

468. Ostracion (Acanthostracion) arcus Blkr = Ostracion cornutus Bl. (nec L.).
469. „ („) Fornarini Blkr = Ostracion Fornarini Bianc.
470. „ (Ostracion) punctatus Lac.
471. „ („) tetragonus L. = Ostracion cubicus L.

La Haye, Novembre 1877.



P Bleeker, dir. L. Speigler, del

Pseudoscarus spilonotus Kner.



Eupomacentrus (Brachypomacentrus) lator Blkr.

OVER HET DIFFERENTIEEREN

VAN EENIGE

ELLIPTISCHE INTEGRALEN

NAAR DEN MODULUS, OF EENE FUNCTIE DAARVAN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

---

1. Wanneer men een onderzoek wil beginnen over de eigenschappen van eenige integraal, hetzij bepaalde, hetzij ook onbepaalde; of evenzeer, wanneer men in beide gevallen de bepaling der waarde op het oog heeft; altijd behoort tot de meest bruikbare methoden, die, waarbij de integraal wordt gedifferentieerd naar eene standvastige, die in de functie onder het integraalteeken voorkomt. Somtijds is het mogelijk, daarbij eene uitdrukking te vinden voor eene herhaalde differentiatie, hetzij in rechtstreekschen, hetzij in wederkeerigen vorm; en dan zijn de stellingen voor herhaald differentieeren van veel belang, die echter slechts voor enkele eenvoudige functiën gelden. Voor de elliptische integralen waren zulke uitkomsten nog niet bekend; hetzij wat de eerste differentiatie, hetzij wat het herhaald differentieeren betreft naar den modulus, die daarin voorkomt. Een ander onderzoek voerde mij tot de behandeling van deze vraag voor de eenvoudige integralen, waarin de $\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}$ voorkomt, en verder voor de overeenkomstige, die $\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}$ bevatten.

2. Men vindt vooreerst

$$\frac{d}{d(p^2)}E(p.x)=\frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx\sqrt{1-p^2 sin^2 x}=\int_0^x \tfrac{1}{2}\,dx\,\frac{-sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}}=-\tfrac{1}{2}\int_0^x\frac{sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}},$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p.x)=\frac{d}{d(p^2)}\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}}=\int_0^x(-\tfrac{1}{2})\,dx\,\frac{-sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^3}=\tfrac{1}{2}\int_0^x\frac{sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^3}.$$

Ten einde deze en dergelijke uitkomsten weder tot elliptische integralen te herleiden, beschouwen wij de integraal

$$\int_0^x\frac{sin^a x\,dx}{\Delta(p\,.\,x)^b}$$

naar de gewone beteekenis $\Delta(p\,.\,x)=\sqrt{1-p^2 sin^2 x}$. Hierin moet vooreerst b oneven zijn, $=2b+1$; anders toch heeft men te doen met rationeele goniometrische integralen, en niet met elliptische integralen. Evenzeer moet a even zijn $=2a$; want voor a oneven, $=2a+1$, dan konde men in de integraal

$$\int_0^x\frac{sin^{2a} x\,.\,sin\,x\,dx}{\sqrt{(1-p^2 sin^2 x)}^{2b+1}}$$

$cos\,x=y$ stellen, zoodat er kwam

$$-\int_0^{cos x}\frac{(1-y^2)^a\,dy}{(1-p^2-p^2y^2)^{b+\frac{1}{2}}},$$

eene gewone irrationeele stelkundige integraal. Voor zulke $a=2a$, en $b=2b+1$ kan men nu aldus te werk gaan.

Omdat hier de methode van het integreeren bij gedeelten niet gemakkelijk of rechtstreeks tot het doel voert, moet men eene zekere, geschikte functie gaan differentieeren, en wel naar het volgende algemeene beginsel, waarbij y en z beide functiën van x zijn.

Stel dat men voor de onbepaalde integraal $\int\frac{y^a\,dx}{z^b}$ eene herleidingsformule wil zoeken, en dat men daarbij niet slaagt met de toepassing van het integreeren

bij gedeelten; dan differentieere men de functie $\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}$; en nu geeft de logarithmische differentiatie

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}=\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}\left[(a+1)\frac{y'}{y}+\frac{z''}{z'}-(b-1)\frac{z'}{z}\right]=\frac{y^a}{z^b}\left[(a+1)y'z'z+yz''z-(b-1)yz'^2\right]=$$

$$=\frac{y^a}{z^b}\left[(ay'z-byz')z'+y'z'z+yz''z+yz'^2\right]=\frac{y^a}{z^b}\left[(ay'z-byz')z'+\frac{d}{dx}(yz'z)\right].\ \ (\alpha)$$

Zoodra men nu er in slagen kan, om den veelledigen factor in het tweede lid dezer formule te ontwikkelen naar opklimmende machten, hetzij van y, hetzij van z, waarbij dan ook y^0 of z^0 in den regel voorkomt, kan men deze methode toepassen. Want nu wordt door integratie naar x het eerste lid een geïntegreerde vorm, $\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}$; en in het tweede lid verkrijgt men eene reeks van eenige integralen derzelfde soort; men kan dus daaruit gemakkelijk eene herleidingsformule zamenstellen.

In ons geval verkrijgen wij langs dezen weg

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos\,x}{(1-p^2sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos\,x}{(1-p^2sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\left[(2a+1)\frac{cos\,x}{sin\,x}+\frac{-sin\,x}{cos\,x}-(b-\tfrac{1}{2})\frac{-p^2\,2\,sin\,x\,.\,cos\,x}{1-p^2sin^2x}\right]=$$

$$=\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[\left\{(2a+1)cos^2x-sin^2x\right\}(1-p^2sin^2x)+(2b-1)p^2sin^2x\,.\,cos^2x\right]=$$

$$=\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[\left\{(2a+1)-2(a+1)sin^2x\right\}(1-p^2sin^2x)+(2b-1)p^2sin^2x(1-sin^2x)\right],$$

en, als men in het tweede lid de veelledige grootheid tusschen de vierkante haakjes naar de machten van $(1-p^2sin^2x)$ rangschikt,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos\,x}{(1-p^2sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{1}{p^2}\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[(2a-2b+3)(1-p^2sin^2x)^2+\right.$$

$$\left.+2\left\{(2-p^2)(b-1)-(1-p^2)a\right\}(1-p^2sin^2x)-(1-p^2)(2b-1)\right],\ \dots\dots\dots\ (\beta)$$

of, wanneer men diezelfde veelledige grootheid rangschikt naar de machten van sin^2x,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos\,x}{(1-p^2sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left\{(2a+1)-\left\{(1+p^2)(a+1)-p^2b\right\}2sin^2x+(2a-2b+3)p^2sin^4x\right\};\ (\gamma)$$

waaruit blijkt, dat men zijn doel heeft bereikt. De eerste herleiding (β) toch geeft, als men naar x tusschen de grenzen 0 en x integreert, en de laatste integraal in het tweede lid oplost, omdat de gedifferentieerde grootheid in het eerste lid voor $x = 0$ verdwijnt,

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-p^2)(2b-1)} \Big[-\frac{sin^{2a+1} x \,.\, cos\, x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$

$$+ 2\{(2-p^2)(b-1)-(1-p^2)a\} \int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} + (2a-2b+3) \int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-3/2}} \Big], \quad . \text{(I)}$$

werkelijk eene herleidingsformule, waarin de veranderlijke parameter, hier de exponent in den noemer, telkens met de eenheid verminderd wordt.

Evenzoo kan men de tweede herleiding (γ) gebruiken. Omdat echter de integraal, die de hoogste macht van $sin^2 x$ bevat, hier tot factor onder het integraalteeken zoude hebben $sin^{2a+4} x$, moet men eerst de a door $a-2$ vervangen; dan integreeren tusschen de grenzen 0 en x van x, waarbij weder de term in het eerste lid voor $x = 0$ verdwijnt; en vervolgens de laatste integraal in het tweede lid oplossen. Langs dien weg verkrijgt men

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2a-2b-1)p^2} \Big[\frac{sin^{2a-3} x \,.\, cos\, x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \{(1+p^2)(a+1) - p^2 b\} 2 \int_0^x \frac{sin^{2a-2} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} - (2a-3) \int_0^x \frac{sin^{2a-4} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} \Big], \quad . \; . \text{(II)}$$

wederom eene herleidingsformule, waarin nu echter de parameter, die telkens met twee afneemt, hier de exponent van den teller is.

De eerste formule (I) heeft tot eindintegralen, voor $b = 1$,

$$\int_0^x sin^{2a} x\, dx \sqrt{1-p^2 sin^2 x} \quad \text{en} \quad \int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}}.$$

Wilde men deze door de andere formule (II) bepalen, zoo heeft men als eindintegralen voor $a = 1$ en $a = 0$,

$$\int_0^x sin^2 x\, dx (1-p^2 sin^2 x)^{\pm\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad \int_0^x dx (1-p^2 sin^2 x)^{\pm\frac{1}{2}}.$$

En hiervan vindt men dadelijk

$$\int_0^x dx \sqrt{1-p^2 \sin^2 x} = E(p\,.\,x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} = F(p\,.\,x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{p^2}\int_0^x \frac{1-(1-p^2 \sin^2 x)}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}}\, dx = \frac{1}{p^2}\Big[F(p\,.\,x) - E(p\,.\,x)\Big]. \quad \ldots \quad (3)$$

Ten einde nu nog de vierde te vinden, gebruike men de herleidingsformule (II) voor $a = 2$, en voere daarbij de waarde van de integraal (3) in; zoo wordt

$$\int_0^x \frac{\sin^4 x\, dx}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{3p^4}\Big\{p^2 \sin x\,.\cos x \sqrt{1-p^2 \sin^2 x} + (2+p^2) F(p\,.\,x) - 2(1+p^2) E(p\,.\,x)\Big\}, \;.\; (4)$$

en daarmede wordt dan

$$\int_0^x \sin^2 x\, dx \sqrt{1-p^2 \sin^2 x} = \int_0^x \frac{1-p^2 \sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} \sin^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{3p^2}\Big\{-p^2 \sin x\,.\cos x \sqrt{1-p^2 \sin^2 x} + (1-p^2) F(p\,.\,x) - (1-2p^2) E(p\,.\,x)\Big\}. \quad \ldots \quad (5)$$

Voor de eerste formulen aan het hoofd dezer paragraaf geeft nog de herleidingsformule (I) voor $a = 1$, $b = 1$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}^{\,3}} = \frac{1}{1-p^2}\Big[-\frac{\sin^3 x\,.\cos x}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} - 2(1-p^2)\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} + 3\int_0^x \sin^2 x\, dx \sqrt{1-p^2 \sin^2 x}\Big],$$

of, door middel der integralen (3) en (5),

$$= \frac{1}{p^2(1-p^2)}\Big[-\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}}\, p^2 \sin x\,.\cos x - (1-p^2) F(p\,.\,x) + (p\,.\,x)\Big]. \quad \ldots \quad (6)$$

3. Deze uitkomsten zijn nu voldoende, om de eerste formulen van de vo-

rige paragraaf nader uit te rekenen; zij geven toch, door middel der integralen (3) en (6)

$$\frac{d}{d(p^2)} E(p \,.\, x) = \frac{1}{2\,p^2}\left[E(p \,.\, x) - F(p \,.\, x)\right], \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$\frac{d}{d(p^2)} F(p \,.\, x) = \frac{1}{2\,p^2(1-p^2)}\left[E(p \,.\, x) - (1-p^2)\,F(p.x) - \frac{1+(1-p^2)\,sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\,sin^2 x}}\,p^2\,sin\,x \,.\, cos\,x\right]; \,. \quad (b)$$

of indien wij de symbolische notatie der achtereenvolgende bewerkingen invoeren, hetgeen hier zeer eenvoudig aangaat,

$$\left[1 - 2\,p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right] E(p \,.\, x) = F(p \,.\, x), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

$$\left[1 + 2\,p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right] F(p \,.\, x) = \frac{1}{1-p^2}\left[E(p \,.\, x) - \frac{1+(1-p^2)\,sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\,sin^2 x}}\,p^2\,sin\,x \,.\, cos\,x\right]. \ldots\ldots \quad (d)$$

4. Op dezelfde wijze kan men de integralen behandelen, die onder het integraalteeken de functie $\sqrt{1+p^2\,sin^2 x}$ bevat; dan beginne men het onderzoek bij de twee eenvoudigste vormen

$$\frac{d}{d(p^2)}\int_0^x d\,x\sqrt{1+p^2\,sin^2 x} \quad \text{en} \quad \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\,sin^2 x}}.$$

Daartoe stelle men in de herleidingsformulen (I) en (II) $-p^2$ in de plaats van p^2; zoo worden deze

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d\,x}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2\,b-1)(1+p^2)}\left[-\frac{sin^{2a+1} x \,.\, cos\,x}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. + 2\left\{(2+p^2)(b-1)-(1+p^2)a\right\}\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d\,x}{(1+p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} + (2a-2b+3)\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d\,x}{(1+p^2 sin^2 x)^{b-3/2}}\right], \ldots \quad (III)$$

$$= \frac{1}{(2\,a-2\,b-1)\,p^2}\left[-\frac{sin^{2a-3} x \,.\, cos\,x}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \left\{(1-p^2)(a-1)+p^2 b\right\}\int_0^x \frac{sin^{2a-2} x\, d\,x}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} + (2\,a-3)\int_0^x \frac{sin^{2a-4} x\, d\,x}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\right]; \;. \quad (IV)$$

waartoe dan verder behooren de volgende eindintegralen, waarbij voor de herleiding, waar noodig, de substitutie $x = \frac{\pi}{2} - y$ is gebruikt,

$$\int_0^x dx \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} = \int_{\frac{1}{2}\pi - x}^{\frac{1}{2}\pi} dy \sqrt{1+p^2 \cos^2 y} = \int_{\frac{1}{2}\pi - x}^{\frac{1}{2}\pi} dy \sqrt{(1+p^2) - p^2 \sin^2 y} =$$

$$= \sqrt{1+p^2} \int_{\frac{1}{2}\pi - x}^{\frac{1}{2}\pi} dy \sqrt{1 - \frac{p^2}{1+p^2} \sin^2 y} = \sqrt{1+p^2} \left[E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{\pi}{2} - x\right) \right] \ldots (7)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} = \int_{\frac{1}{2}\pi - x}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy}{\sqrt{1+p^2 \cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \int_{\frac{1}{2}\pi - x}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{1+p^2} \sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{\pi}{2} - x\right) \right], \ldots \ldots \ldots (8)$$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x \, dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{p^2} \int_0^x \frac{(1+p^2 \sin^2 x) - 1}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{p^2} \left[\int_0^x dx \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \right],$$

of, na invoering dezer integralen (7) en (8),

$$= \frac{1}{p^2 \sqrt{1+p^2}} \left[(1+p^2) \left\{ E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{\pi}{2} - x\right) \right\} - \left\{ F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{\pi}{2} - x\right) \right\} \right] \ldots (9)$$

Ten einde te kunnen voortgaan met het opsporen van de volgende integralen, wende men zich tot de herleidingsformule (IV), en stelle daarin $a = 2$, $b = 0$; dan verkrijgt men, na invoering der integralen (8) en (9),

$$\int_0^x \frac{\sin^4 x \, dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{3p^2} \left[-\sin x . \cos x \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} - 2(1-p^2) \int_0^x \frac{\sin^2 x \, dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \right] =$$

$$= \frac{1}{3p^4 \sqrt{1+p^2}} \left[-p^2 \sin x . \cos x \sqrt{1+p^2} \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} + \right.$$

$$\left. + (2-p^2) \left\{ F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{\pi}{2} - x\right) \right\} - 2(1-p^4) \left\{ E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{\pi}{2} - x\right) \right\} \right] . (10)$$

Thans is men in staat gesteld, om de waarde te bepalen der integraal

$$\int_0^x \sin^2 x\, d\,x \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} = \int_0^x \frac{\sin^2 x + p^2 \sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,d\,x =$$

$$= \frac{1}{3\,p^2}\sqrt{1+p^2}\Big[-p^2 \sin x.\cos x \sqrt{\frac{1+p^2\sin^2 x}{1+p^2}} - \Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\} +$$
$$+ (1+2p^2)\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

waarbij de overbrenging der integralen (9) en (10) den factor $(1+p^2)$ invoerde, die derhalve uit de grootheid tusschen de haakjes konde verwijderd worden. Daarop geeft de herleidingsformule (III) voor $a=1$ en $b=1$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\,x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} = \frac{1}{1+p^2}\Big[-\frac{\sin^3 x\,.\cos x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - 2(1+p^2)\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\,x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + 3\int_0^x \sin^2 x dx \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\Big],$$

die weder door de invoering der pas gevonden integralen (9) en (11) overgaat in

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\,x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} = \frac{1}{p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[-\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\cdot\frac{p^2 \sin x\,.\cos x}{\sqrt{1+p^2}} +$$
$$+ F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,\frac{\pi}{2}-x\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) + E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big] \quad \ldots (12)$$

5. Deze uitkomsten kunnen nu strekken tot het vinden der gezochte differentiaalformulen voor de integralen, die hier met de elliptische integralen overeenkomen. Men verkrijgt toch naar de uitkomsten (7) en (8), wanneer men naderhand van de integralen (9) en (12) gebruik maakt,

$$\frac{d}{d(p^2)}\Big[\sqrt{1+p^2}\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big] = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx\sqrt{1+p^2\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\,x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} =$$
$$= \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[(1+p^2)\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\} - \Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big], \,.\, (e)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}\Big[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big] = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x \frac{d\,x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\,x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} = \frac{1}{2\,p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,\frac{p^2 \sin x\,.\cos x}{\sqrt{(1+p^2)}} +$$
$$+ E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,\frac{\pi}{2}-x\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) + F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big], \,.\, (f)$$

waaruit men besluit tot den symbolischen vorm

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

$$\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]=$$
$$=\frac{1}{1+p^2}\left[\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}+\frac{1+(1+p^2)\sin^2x}{\sqrt{1+p^2\sin^2x}}\,p^2\sin x.\cos x\right], \quad . (h)$$

waarbij eene zekere overeenkomst met de vorige symbolische formulen (c) en (d) niet te miskennen is.

Wanneer men echter ter bekorting stelt

$$F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)=F_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

$$E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)=E_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

en daarop de differentiaalquotienten in de eerste leden van de formulen (e) en (f), als die van een produkt uitwerkt, verkrijgt men achtereenvolgens

$$\sqrt{1+p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1+E_1\,\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2)E_1-F_1\right\};$$

derhalve

$$\sqrt{1+p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left[E_1-F_1\right], \text{ of } \frac{d}{d(p^2)}E_1=\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left[E_1-F_1\right]. \quad . (e_1)$$

Evenzeer

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d}{d(p^2)}F_1+F_1-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}^3}=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2x}{\sqrt{1+p^2\sin^2x}}\,\frac{p^2\sin x\cos x}{\sqrt{1+p^2}}+E_1-F_1\right],$$

derhalve

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}^3}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2x}{\sqrt{1+p^2\sin^2x}}\,p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}+(1+p^2)E_1-F_1\right],$$

of

$$\frac{d}{d(p^2)}F_1 = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2 \sin x . \cos x\sqrt{1+p^2} + (1+p^2)E_1 - F_1\right]. \; . \; . \; (f_1)$$

En hieruit besluit men wederom tot den symbolischen vorm der formulen

$$\left[1-2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]E_1 = F_1, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g_1)$$

$$\left[1+2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]F_1 = \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2 \sin x . \cos x\sqrt{1+p^2}+(1+p^2)E_1; \; . \; . \; (h_1)$$

die schijnbaar eenvoudiger zijn dan de vorige symbolische differentiaalformulen (g) en (h), en mede eenige overeenkomst vertoonen met de formulen (c) en (d) van § 3.

6. De bewerking $\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]$ op de elliptische integraal der tweede soort toegepast, levert eene integraal der eerste; en de bewerking $\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]$ toegepast op de integraal der eerste soort, levert wederom eene integraal der tweede, afgezien van een factor $\frac{1}{1-p^2}$ en een goniometrischen term; dit volgt uit de symbolischen formulen (c) en (d) van § 3. Het ligt nu al dadelijk voor de hand om op de elliptische integraal van iedere soort zoodanige bewerking toe te passen, dat er wederom eene elliptische integraal van dezelfde soort ontstaat; hierin slaagt men op de volgende wijze, wanneer men de symbolische bewerkingen (c) en (d) van § 3 achtereenvolgens toepast,

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x) = E(p.x) - p^2 \sin x.\cos x\left\{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\} =$$

$$= E(p.x) - \sin x . \cos x\left\{-(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\}; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (i)$$

wanneer men hierbij acht geeft op het ontstaan van den goniometrischen term in de formule (d), dat is op de integraal (6) in § 2. Zoodra men toch eenige wet wil opsporen, is het meestal nuttig van de latere herleidingen af te zien, en op te klimmen tot den oorspronkelijken vorm; en ook hier zal blijken, dat deze oor-

spronkelijke vorm voor de volgende bewerkingen het meest geschikt is. Uit deze (i) volgt nu verder

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p\,.\,x)=$$

$$=F(p\,.\,x)-p^2\sin x\,.\cos x\left\{-2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\right\}=$$

$$=F(p\,.\,x)-\sin x\,.\cos x\left\{-2p^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\right\};\ .\ .\ (i_1)$$

en wederom

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p\,.\,x)=$$

$$=E(p\,.\,x)-p^2\sin x.\cos x\left\{(7-8p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{4(1-p^2)+\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{2+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}+\frac{3\cos^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^5}\right\}=$$

$$=E(p\,.\,x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-7p^2+8p^4)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1+4p^2-4p^4}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+\frac{(3+p^2)(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}+3\frac{1-p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^5}\right\};.(i_2)$$

waarbij nu de bewerkingen op de elliptische integraal der tweede soort toegepast, hetzij eene integraal van dezelfde, hetzij eene der eerste soort voortbrengen, afgezien van den goniometrischen vorm, die hier telkens bestaat uit eenen factor $p^2\sin x\,.\cos x$, en eenen anderen, die functie is van $\sqrt{1-p^2\sin^2 x}$.

Hetzelfde kan men even zoo goed bewerkstelligen ten opzichte van de elliptische integraal der eerste soort, en verkrijgt alsdan achtereenvolgens

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p\,.\,x)=E(p\,.\,x)-p^2\sin x\,.\cos x\left(\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right)=$$

$$=E(p\,.\,x)-\sin x\,.\cos x\left\{-(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (d)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p\,.\,x)=$$

$$=F(p\,.\,x)-\sin x\,.\cos x\left\{-2p^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\right\},\ .\ (k)$$

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p\,.\,x)=$$

$$=F(p\,.\,x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-7p^2+8p^4)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1+4p^2-4p^4}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+\frac{(3+p^2)(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}+3\frac{1-p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^5}\right\}..(k_1)$$

Het is niet moeielijk, uit deze verkregen formulen tot meer algemeene uitkomsten te geraken. Noem daartoe de bewerkingen

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P,\ \ldots\ (\zeta),\ \text{en}\ \left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=Q;\ \ldots\ldots\ (\eta)$$

en zij in het algemeen $\Phi(x)$ eene rationeele functie van de wortelgrootheid $\sqrt{1-p^2 sin^2 x}$; dan volgt rechtstreeks uit de formulen (i), (i_1) en (i_2), (d), (k) en (k_1),

$$[Q.P.Q\ \ldots\ Q.P.Q]\,E(p.x)=F(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x),\ \ldots\ldots\ (i_3)$$

$$[P.Q.P\ \ldots\ Q.P.Q]\,E(p.x)=E(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x),\ \ldots\ldots\ (i_4)$$

$$[P.Q.P\ \ldots\ P.Q.P]\,F(p.x)=E(p.x)+sin\,x.cos\,x\ \Phi(x),\ \ldots\ldots\ (k_2)$$

$$[Q.P.Q\ \ldots\ P.Q.P]\,F(p.x)=F(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x).\ \ldots\ldots\ (k_3)$$

Maar langs dezen weg ziet men niet in, wat de algemeene vorm van de functie $\Phi(x)$ worden zal, en de vergelijking dier functiën zoo als zij in de formulen (i_1), (i_2), (k), (k_1) voorkomen, geeft hier geen licht; ook niet, wanneer bij het uitwerken der bewerkingen, de gelijknamige termen niet bij elkander telt, zoo als hier boven is geschied, maar ze gescheiden houdt, onder gedurige toepassing der duidelijke herleidingsformule

$$\frac{p^2 sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k+1}}=\frac{1-(1-p^2 sin^2 x)}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k-1}},\ \ldots\ (\theta)$$

ten einde de grootheid tusschen de vierkante haakjes, in het tweede lid, telkens tot functie van alleen $\sqrt{1-p^2 sin^2 x}$ te herleiden.

Zoodra men echter later overgaat tot compleete elliptische integralen, dus tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ genomen; dan wordt dit bezwaar geheel opgeheven, omdat alsdan de $\Phi(x)$ in het geheel niet meer voorkomt. Zij zelve kan toch nimmer oneindig groot worden, en de factor $sin\,x.cos\,x$ wordt gelijk aan nul, zoowel voor $x=0$, als voor $x=\frac{1}{2}\pi$; vandaar dat die laatste term in de vorige formulen geheel verdwijnt.

7. Wanneer men nu dezelfde beschouwingen wil toepassen op de differentiaalformulen, die in § 5 voorkomen, stelle men eerst ter bekorting

$$\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=E_2,\ \ldots\ldots\ (\iota)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=F_2, \quad \ldots \ldots \ldots (k)$$

dan verkrijgen de formulen (g) en (h) den vorm

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E_2=F_2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (g')$$

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F_2=E_2+p^2 \sin x.\cos x\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]=$$

$$=E_2+\sin x.\cos x\left[(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right]=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad . \ (h')$$

waar de $\Psi(x)$ uitdrukt eene rationeele functie van de wortelgrootheid $\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}$. Past men deze bewerkingen, vice versa, nog eenmaal toe, zoo verkrijgt men

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E_2=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad \ldots \ldots (l)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F_2=F_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x). \quad \ldots \ldots (m)$$

Wanneer men toch de aangewezene bewerkingen ten uitvoer brengt, en overal, waar noodig, de herleidingsformule

$$\frac{p^2\sin^2 x}{\left(\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)^{2n+1}}=\frac{(1+p^2\sin^2 x)-1}{\left(\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)^{2n+1}}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)^{2n-1}}-\frac{1}{\left(\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)^{2n+1}} \quad . \ (\lambda)$$

toepast, dan verkrijgt men telkens in het tweede lid een goniometrischen term, die $\sin x.\cos x$ tot factor heeft en waarvan de andere factor een rationeele vorm van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$, dat is eene $\Psi(x)$ is.

Maar nu kan men ook doorgaan met de achtereenvolgende toepassing der vorige bewerkingen; voeren wij daarbij gemakshalve wederom symbolen in, dan kan men de Q uit (η) behouden, maar moet de P uit (ζ) vervangen worden door

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P_1. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\mu)$$

Op die wijze verkrijgt men dan hier

$$[P_1.Q.P_1 \ldots Q.P_1.Q]\,E_2=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (l_1)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots Q.P_1.Q]\, E_2 = F_2 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (l_2)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots P_1.Q.P_1]\, F_2 = F_2 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (m_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \ldots P_1.Q.P_1] F_2 = E_2 + \sin x.\cos x\, \Psi(x). \ldots\ldots\ldots\ldots (m_2)$$

Ook de formulen (g_1) en (h_1) geven gereede aanleiding voor eene overeenkomstige behandeling; maar daarbij heeft men dan andere bewerkingssymbolen noodig. Noem deze hier

$$\left[1 - 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = R, \ldots\ldots\ldots\ldots (\nu)$$

$$\left[\frac{1}{1+p^2}\right]\left[1 + 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = S, \ldots\ldots\ldots\ldots (\xi)$$

dan heeft men vooreerst

$$[R]\, E_1 = F_1, \ldots\ldots\ldots\ldots (g_1)$$

$$[S]\, F_1 = E_1 + \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,\frac{p^2 \sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}} = E_1 + \frac{p^2 \sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\} =$$

$$= E_1 + \frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\} = E_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x); \,.\ (h_1)$$

wanneer men onder $\Psi(x)$, even als boven, wederom eene rationeele functie van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ verstaat. Bij de herhaalde toepassing dezer bewerkingen, over en weder, komt er daarop vooreerst

$$[S.R]\, E_1 = E_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

$$[R.S]\, F_1 = F_1 + \sin x.\cos.\, \Psi(x); \ldots\ldots\ldots\ldots (o)$$

en vervolgens, geheel algemeen,

$$[S.R.S \ldots R.S.R]\, E_1 = E_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (n_1)$$

$$[R.S.R \ldots R.S.R]\, E_1 = F_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (n_2)$$

$$[R.S.R \ldots S.R.S]\, F_1 = F_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (o_1)$$

$$[S.R.S \ldots S.R.S]\, F_1 = E_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (o_2)$$

Een groot bezwaar van al de formulen in deze paragraaf, is, dat zij allen eene zekere functie $\Psi(x)$ van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ bevatten, waarvan de wet vooralsnog

onbekend is. Zoodra men echter later tot de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ overgaat, zoodat de elliptische integralen compleete worden met den modulus $\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$, wordt dit bezwaar weggenomen, omdat dan die functiën van onbekende zamenstelling niet meer voorkomen wegens den factor $\sin x . \cos x$, die evenzeer voor $x = 0$, als voor $x = \frac{1}{2}\pi$ verdwijnt.

8. Men kan echter tot geheel andere, niet minder belangrijke, uitkomsten geraken, door de vergelijking (a) nog eens naar p^2 te differentieeren; en daarbij gebruik te maken van de reeds gevonden eerste differentialen naar de formulen (a) en (b). Aldus verkrijgt men

$$\frac{d^2}{d(p^2)} E(p.x) = \frac{-1}{2p^4}[E(p.x) - F(p.x)] + \frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{2p^2}\{E(p.x) - F(p.x)\} - \frac{1}{2p^2(1-p^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left\{- \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} p^2 \sin x . \cos x - (1-p^2) F(p.x) + E(p.x)\right]\right\} =$$

$$= \frac{-1}{2p^4}[E(p.x) - F(p.x)] + \frac{1}{4p^4}\left[\frac{(1-p^2)-1}{1-p^2} E(p.x) + (1-1)F(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} \frac{p^2 \sin x . \cos x}{1-p^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2p^4} F(p.x) - \frac{2(1-p^2)+p^2}{4p^4(1-p^2)} E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} \frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)}; \quad \ldots (p)$$

en verder, door middel van de formule (a), ten einde de overgebleven $F(p.x)$ te elimineeren,

$$\left[\frac{d^2}{d(p^2)} + \frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}\right] E(p.x) = \left\{\frac{1}{2p^4} - \frac{2-p^2}{4p^4(1-p^2)}\right\} E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} \frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)} =$$

$$= \frac{-p^2}{4p^4(1-p^2)} E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} \frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)};$$

en hieruit volgt ten slotte

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)} + 4(1-p^2)\frac{d}{d(p^2)} + 1\right] E(p.x) = \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} \sin x . \cos x =$$

$$= \left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\} \sin x . \cos x; \quad \ldots\ldots\ldots (p_1)$$

waarbij met voordacht is afgezien van de nadere herleiding van den goniometrischen term, zooals die in de formule (i) is toegepast. Want nu kan men gemakkelijk $n-2$ maal differentieeren, het eerste lid volgens het theorema van LEIBNITZ, en het tweede lid naar de bekende formulen (zie o. a. mijn Overzicht der Differ. Rekening, bladz. 33, 34).

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1-p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)\,4(1-2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)4(-2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \quad 4(1-p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + (n-2)\,4(-1)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad + \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] E(p.x) =$$

$$= \sin x \,.\, \cos x \left[\sin^2 x \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\, \tfrac{1}{2}\, \frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right] =$$

$$= \sin^3 x \,.\, \cos x \left[\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} - \tfrac{1}{2} \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right];$$

of wel, na herleiding,

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + 4\{(n-1)-(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \{1-4(n-2)^2\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right] E(p.x) =$$

$$= \sin^3 x \,.\, \cos x \left\{\frac{(-1)^{n-2}\, 1^{n-2/2}\, (-\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}} - \tfrac{1}{2}\, \frac{(-1)^{n-3}\, 1^{n-3/2}\, (-\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}\right\} =$$

$$= \frac{-\sin^{2n-3} x \,.\, \cos x}{(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}\, \frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}} \{1-(2n-5+p^2)\sin^2 x\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

Ten einde voorts de vergelijking (b) op dezelfde wijze te behandelen, schrijve men haar kortheidshalve

$$\frac{d}{d(p^2)} F(p.x) = R - \frac{1}{2p^2} F(p.x) + \frac{1}{2p^2(1-p^2)} E(p.x), \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

waar dus

$$R = -\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\, \frac{\sin x \,.\, \cos x}{2(1-p^2)}$$

genomen werd; dan verkrijgt men, door nog eens naar p^2 te differentieeren,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p.x) = \frac{dR}{d(p^2)} + \frac{1}{2p^4}F(p.x) - \frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x) - \frac{1}{2p^2}\left\{R - \frac{1}{2p^2}F(p.x) + \frac{1}{2p^2(1-p^2)}E(p.x)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2p^2(1-p^2)}\,\frac{1}{2p^2}\{E(p.x) - F(p.x)\} =$$

$$= \frac{dR}{d(p^2)} - \frac{1}{2p^2}R + F(p.x)\left\{\frac{1}{2p^4} + \frac{1}{4p^4} - \frac{1}{4p^4(1-p^2)}\right\} + E(p.x)\left\{-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2} - \frac{1}{4p^4(1-p^2)} + \frac{1}{4p^4(1-p^2)}\right\} =$$

$$= \frac{dR}{d(p^2)} - \frac{1}{2p^2}R + \frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p.x) - \frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x), \ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

$$=\frac{-\sin x\,.\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left\{(1-p^2)-(3-4p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2)^2(1-p^2\sin^2 x)^2\right\}+$$

$$+\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p\,.x)-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p\,.x)\,.\quad(r_1)$$

Gebruikt men nu de formule (b) weder, om uit (r) de $E(p\,.a)$ te elimineeren, zoo verkrijgt men

$$\left[\frac{d^2}{d(p^2)^2}+\frac{1-2p^2}{p^2(1-p^2)}\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p\,.x)=\frac{dR}{d(p^2)}+R\left\{-\frac{1}{2p^2}+\frac{1-2p^2}{p^2(1-p^2)}\right\}+F(p\,.x)\left\{\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)}\right\}=$$

$$=\frac{dR}{d(p^2)}+\frac{1-3p^2}{2p^2(1-p^2)}R+\frac{p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p\,.x);$$

waaruit wederom wordt afgeleid

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1-2p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]F(p\,.x)=4p^4(1-p^2)\frac{dR}{d(p^2)}+2(1-3p^2)R=$$

$$=\frac{\sin x\,.\cos x}{p^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left[1-(1+p^2)(1-p^2\sin^2 x)+2p^2(1-p^2\sin^2 x)^2\right]=$$

$$=\frac{\sin x\,.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left[\sin^2 x-(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2\sin^2 x)^2\right].\,.\,.\,.\,.\,.\quad(r_2)$$

Bij deze herleidingen is in de laatste vergelijking (r_2), even als bij (r_1), gebruik gemaakt van de volgende uitkomst

$$\frac{d}{d(p^2)}R=-\tfrac{1}{2}\sin x\,.\cos x\,\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\left\{\frac{-\sin^2 x}{1+(1-p^2)\sin^2 x}-\frac{-1}{1-p^2}-\tfrac{1}{2}\frac{-\sin^2 x}{1-p^2\sin^2 x}\right\}=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sin x\,.\cos x\,\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{2+(1-3p^2)\sin^2 x+(1-p^2)^2\sin^4 x}{2(1-p^2)(1-p^2\sin^2 x)\left\{1+(1-p^2)\sin^2 x\right\}}=$$

$$=\frac{-\sin x\,.\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left\{(1-p^2)-(2-3p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x)+(1-p^2)^2(1-p^2\sin^2 x)^2\right\}$$

En nu kan men er toe overgaan, om de vergelijking (r_2) $n-2$ maal te differentieeren met behulp van het theorema van LEIBNITZ bij het eerste lid, en der boven aangehaalde formulen bij het tweede lid; deze bewerking levert ons dan het volgende

$$\left[\begin{matrix} 4p^2(1-p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-2)4(1-2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)4(-2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ +\quad 4(1-2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+(n-2)4(-2)\qquad\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ -\qquad\qquad\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{matrix}\right]F(p.x)=$$

$$=\sin x\,.\cos x\,\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{2\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+2\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\};$$

waaruit men na herleiding verkrijgt

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}-\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F(p.x)=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{2\frac{(-1)^{n-1}1^{n-1/2}(-\sin^2 x)^{n-1}}{2^{n-1}(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}-\frac{(-1)^{n-2}1^{n-2/2}(-\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}-\sin^2 x\frac{(-1)^{n-3}1^{n-3/2}(-\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1-p^2\sin^2 x)^{n-5/2}}\right\}=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x(\sin^2 x)^{n-2}1^{n-3/2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\{-\sin^2 x(2n-3)(2n-5)+(2n-5)(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2\sin^2 x)^2\}=$$

$$=\frac{-\sin^{2n-3}x.\cos x}{(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}}\left[(2n-3)+\{(2n-3)(2n-5)-(2n-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x\right]\quad .\ (s)$$

9. Laat ons trachten, dergelijke algemeene differentiaalformulen af te leiden voor de overeenkomstige integralen van § 5; beginnen wij daartoe met den laatsten vorm der uitkomsten (e_1) en (f_1). Differentieeren wij de vergelijking (e_1) nog eens naar p^2, zoo komt er

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_1=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{\frac{d}{d(p^2)}E_1-\frac{d}{d(p^2)}F_1\right\}=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+$$

$$+\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\,\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left[(E_1-F_1)-\left\{\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}-F_1+(1+p^2)E_1\right\}\right]=$$

$$=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}\left[-p^2E_1-\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\right].\quad .\ (t)$$

Daar nu de F_1 uit den tweeden term van het tweede lid verdwenen is, en alleen voorkomt in den eersten term aldaar; en daar die eerste term naar de vergelijking (e_1) zelve juist

$$-\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}E_1$$

tot waarde heeft, zoo geeft het overbrengen daarvan in het eerste lid

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_1+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}E_1=-\frac{1}{4p^2(1+p^2)^2}\left[E_1+\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x\cos x\sqrt{1+p^2}\right];$$

waaruit dadelijk volgt

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]E_1=$$

$$=-\sin x\,.\cos x\sqrt{1+p^2}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\};\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(t_1)$$

eene uitkomst, die men nu weder gereedelijk $n-2$ maal naar p^2 kan differentieeren; bij welke bewerking eenerzijds het theorema van LEIBNITZ, anderzijds de boven aangehaalde formulen voor herhaald differentieeren te gebruiken zijn. Langs dien weg komt men tot deze uitkomst

$$\left[\begin{array}{l}4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-2)4(1+4p^2+3p^4)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)4(4+6p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+\\ \qquad+\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)4.6.\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\\ +\quad 4(1+3p^2+2p^4)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+(n-2)\quad 4(3+4p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+\\ \qquad+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)\quad 4.4.\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\\ \qquad+\quad\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\end{array}\right]E_1=\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}P;\ .(t_2)$$

als P het tweede lid van de vergelijking (t_1) voorstelt, dus

$$P=(-\sin x\,.\cos x)(\sqrt{1+p^2})\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}$$

Ten einde van deze uitdrukking het $n-2$ differentiaalquotient ten opzichte van p^2 te bepalen, is men gedwongen, zijn toevlucht te nemen tot het theorema van LEIBNITZ; en daartoe vindt men achtereenvolgens

$$\frac{d^k}{d(p^2)^k}\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]=$$

$$=\frac{d^k}{d(p^2)^k}\cdot\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\frac{d^{k-1}}{d(p^2)^{k-1}}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\sin^2 x\cdot\left[\frac{(-1)^k 1^{k|1/2}(\sin^2 x)^k}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}+\tfrac{1}{2}\frac{(-1)^{k-1}1^{k-1/2}(\sin^2 x)^{k-2}}{2^{k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{k-\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^k\sin^{2k}x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\,\frac{1^{k-1/2}}{2^k}\left\{(2k-1)\sin^2 x-(1+p^2\sin^2 x)\right\}=\frac{(-1)^{k-1}\sin^{2k}x\;1^{k-1/2}}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\left\{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x\right\},$$

$$\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\cdot\sqrt{1+p^2}=\tfrac{1}{2}\,\frac{d^{n-k-3}}{d(p^2)^{n-k-3}}\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\tfrac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n-k-3}\,1^{n-k-3/2}}{2^{n-k-3}\,(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}};$$

zoodat nu algemeen is

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}P=-\sin x.\cos x\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{(-1)^{k-1}\sin^{2k}x.1^{k-1/2}}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\left\{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x\right\}\frac{(-1)^{n-k-3}1^{n-k-3/2}}{2^{n-k-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n-2}(-1)^{n-1}\binom{n-2}{k}\frac{1^{k-1/2}\,1^{n-k-3/2}\sin^{2k+1}x\,.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}\;\frac{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}};$$

en hierdoor wordt de vergelijking (u) na eenige herleiding

$$\Big[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\left\{n(1+3p^2)-(1+4p^2)\right\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+$$

$$+\left\{1+4(n-2)[n(2+3p^2)-(3+5p^2)]\right\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)^2(n-3)\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\Big]E_1=$$

$$=\Big[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\left\{(2n-3)p^2+(n-1)(1+p^2)\right\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+$$

$$+\left\{1+4(n-2)[(n-2)p^2+(2n-3)(1+p^2)]\right\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)^2(n-3)\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\Big]E_1=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n-2}(-1)^{n-1}\binom{n-2}{k}\frac{1^{k-1/2}\,1^{n-k-3/2}\sin^{2k+1}x\,.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}\;\frac{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}},\quad\ldots\quad(u_1)$$

waarin de tweede vorming van het eerste lid geschied is met het oog op de straks af te leiden algemeene differentiaalformule (w_1) voor de andere functie F_1: op die wijze toch wordt eerst het verband tusschen beide formulen zichtbaar.

Ten einde nu de overeenkomstige vergelijking (f_1) op dezelfde wijze te kunnen behandelen, schrijve men haar eerst in den volgenden vorm

$$\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{\sin x\,.\cos x}{2\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]+\frac{1}{2p^2}E_1-\frac{1}{2p^2(1+p^2)}F_1,\quad.\ (f_1)$$

dan komt er, wanneer men, even als boven, nog eens ten opzichte van p^2 differentieert,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_1 = \frac{-\sin x.\cos x}{2\cdot 2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}+\frac{\sin x.\cos x}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-\frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}F_1+\frac{1}{2p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1-\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_1=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4\sqrt{1+p^2}^3}\left\{(1+p^2)\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-p^2\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}F_1+\frac{1}{4p^4(1+p^2)}(E_1-F_1)+$$

$$+\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}^3}\left\{ [illegible] \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}E_1+\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}F_1=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}+(1-p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{(1+2p^2)-(1+p^2)+1}{4p^4(1+p^2)^2}F_1 \ldots (v)$$

Ten einde hieruit nog de overgebleven E_1 te elimineeren, telle men naar de formule (f_1) bij

$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^4\sqrt{1+p^2}}\left\{-2\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sqrt{(1+p^2\sin^2 x)}\right\}+\frac{1}{2p^4}E_1-\frac{2(1+p^2)}{4p^4(1+p^2)^2}F_1,$$

dan komt er, na herleiding,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_1+\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-(1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}F_1;$$

waaruit verder dadelijk volgt

$$\left[4p^4(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F_1=$$

$$=-p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-(1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}\ldots(v_1)$$

Hierbij valt reeds dadelijk op te merken, dat de symbolische bewerking van het eerste lid overgaat in die bij de vergelijking (t_1) wanneer men in (v_1) de p^2 en $1+p^2$ onderling verwisselt; men ziet dadelijk dat eene dergelijke verwisseling, dat is van p^2 en $1-p^2$, bij de vorige overeenkomstige vergelijkingen (p_1) en (r_1) niet opgaat. Wil men nu uit deze differentiaalformule van de tweede orde eene

algemeene differentiaalformule afleiden, dan moet men eerst het tweede lid der vorige vergelijking (v_1), wat betreft den factor tusschen de haakjes, in een anderen vorm brengen, meer geschikt voor het algemeene differentieeren naar p^2; men vindt alzoo achtereenvolgens

$$p^2 \frac{\sin^4 x}{\sqrt{(1+p^2\sin^2 x)^3}} - (1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - \sqrt{1+p^2\sin^2 x} =$$

$$= \left\{-\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} + \frac{\sin^2 x}{\sqrt{(1+p^2\sin^2 x)}}\right\} - \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \left\{\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\} - \sqrt{1+p^2\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - 2\sqrt{1+p^2\sin^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (v_2)$$

Differentieer nu $n-2$ maal naar (p^2), zoo wordt

$$\left[\begin{aligned} &4p^4(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)\,4p^2(2+3p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,4(2+6p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ &\qquad + \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)\,.\,4.6.\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ &+ \quad 4p^2(1+p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + (n-2) \quad 4(1+2p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,.\,4\,.\,2\,.\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ &\qquad + \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{aligned}\right] F_1 = \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}Q, \,.\, (w)$$

waarbij Q het tweede lid der vergelijking (v_1) voorstelt, en wel zoo, dat de tweede factor tusschen de haakjes den vorm (v_2) heeft verkregen. Men heeft dus

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}Q = -\sin x.\cos x\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\left[(p^2\sqrt{1+p^2})\left(-\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - 2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)\right].$$

Ten einde deze door middel van het theorema van LEIBNITZ te bepalen, heeft men eerst

$$\frac{d^k}{d(p^2)^k}[p^2\sqrt{1+p^2}] = p^2\frac{d^k}{d(p^2)^k}\sqrt{1+p^2} + k.1.\frac{d^{k-1}}{d(p^2)^{k-1}}\sqrt{1+p^2} = p^2\,\tfrac{1}{2}\frac{(-1)^{k-1}1^{k-1/2}}{2^{k-1}(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}} + k.\tfrac{1}{2}\frac{(-1)^{k-2}1^{k-2/2}}{2^k(1+p^2)^{k-3/2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-2}1^{k-2/2}}{2^k(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}}\{-p^2(2k-3) + 2(1+p^2)\} = \frac{(-1)^{k-2}1^{k-2/2}}{2^k(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}}\{2-(2k-5)p^2\},$$

$$\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\left(\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)=$$

$$=2\frac{d^{n-k-1}}{d(p^2)^{n-k-1}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sin^2 x\frac{d^{n-k-3}}{d(p^2)^{n-k-3}}\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=$$

$$=2\frac{(-1)^{n-k-1}1^{n-k-1/2}(\sin^2 x)^{n-k-1}}{2^{n-k-1}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-1/2}}+\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-3/2}}-\sin^2 x\frac{(-1)^{n-k-3}1^{n-k-5/2}(\sin^2 x)^{n-k-3}}{2^{n-k-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-5/2}}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-3/2}}\left\{-(2n-2k-3)(2n-2k-5)\sin^2 x+(2n-2k-5)(1+p^2\sin^2 x)+2(1+p^2\sin^2 x)^2\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-1/2}}\left[(2n-2k-3)-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x\right];$$

zoodat eindelijk wordt

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\Omega=-\sin x\cos x\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{1^{n-k-3/2}1^{k-2/2}(-1)^n(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-2}(1+p^2)^{k-1/2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-1/2}}\{2-(2k-5)p^2\}\times$$
$$\times\left[(2n-2k-3)-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x\right];$$

en hiermede verkrijgen wij ten slotte voor onze differentiaalformule (w)

$$\left[\begin{array}{l}4p^4(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{n(2+3p^2)-(3+5p^2)\}\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\\+[1+4(n-2)\{n(1+3p^2)-(2+7p^2)\}]\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)(n-3)^2\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\end{array}\right]F_1=$$

$$=\left[\begin{array}{l}4p^4(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{(2n-3)(1+p^2)+(n-2)p^2\}\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\\+[1+4(n-2)\{(n-2)(1+p^2)+(2n-5)p^2\}]\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)(n-3)^2\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\end{array}\right]F_1=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{1^{n-k-3/2}1^{k-2/2}\sin^{2n-2k-3}x\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{k-1/2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-1/2}}\{2-(2k-5)p^2\}[(2n-2k-3)-$$
$$-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-5)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x];\quad\ldots\ldots\quad(w_1)$$

waarbij wederom het eerste lid door eene kleine herleiding zoo veranderd is, dat de straks vermelde overeenkomst met de formule (u_1) gemakkelijker in het oog springt.

10. De schijnbaar meer zamengestelde vergelijkingen (e) en (f) kan men op dezelfde wijze behandelen; zoo als men zien zal, geven zij tot meer eenvoudige uitkomsten aanleiding. Schrijven wij ze daartoe in den volgenden vorm

$$\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{1}{2p^2}(E_2 - F_2), \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (e')$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F_2 = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x - (1+p^2)F_2 + E_2\right\} =$$
$$= \frac{\sin x.\cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2; \ldots (f')$$

waarbij nu de vormen E_2 en F_2 van de formulen (i) en (k) zijn ingevoerd; zoodat die beide vergelijkingen in dezen vorm met de andere vergelijkingen (c) en (d) tamelijk wel overeenkomen. Differentieert men nu deze vergelijkingen nog eenmaal naar p^2, en voert men daarna dezelfde vergelijkingen wederom in, zoo komt er achtereenvolgens voor de eerste

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_2 = -\frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2) + \frac{1}{2p^2}\left(\frac{d}{d(p^2)}E_2 - \frac{d}{d(p^2)}F_2\right) = -\frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2) +$$
$$+\frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{2p^2}(E_2 - F_2) - \left\{\frac{\sin x.\cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2\right\}\right]; \ldots (x)$$

omdat nu bij den term tusschen de vierkante haakjes in het tweede lid, de term $\frac{1}{2p^2}F_2$ geheel verdwijnt, behoeft de F_2 alleen uit den eersten term van dat tweede lid te worden geëlimineerd. Dit geschiedt zeer eenvoudig door middel van de vergelijking (e'); telt men toch bij

$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2),$$

zoo komt er

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_2 + \frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{(1+p^2)-1}{4p^4(1+p^2)}E_2 - \frac{\sin x.\cos x}{4p^2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right),$$

of, na eene aangewezen herleiding,

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2} + 4(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)} - 1\right]E_2 = -\sin x.\cos x\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right), \ldots (x_1)$$

waaruit verder, wanneer men deze vergelijking $n-2$ maal naar p^2 differentieert, de algemeene differentiaalformule volgt

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)\,4(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,.\,4\,.\,2\,.\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \quad 4(1+p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + (n-2)\qquad 4\,.\,1\,.\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad - \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] E_2 =$$

$$= -\sin x\,.\cos x\left\{\sin^2 x\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\},$$

dat is

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + 4\{(n-1)+(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \{4(n-2)^2-1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E_2 =$$

$$= -\sin x\,.\cos x\left\{\frac{(-1)^{n-2}\,1^{n-2|2}(\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-3/2}} + \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n-3}\,1^{n-3|2}(\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-5/2}}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n\sin^{2n-1}x\,.\cos x}{(1+p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}\,\frac{1^{n-3|2}}{2^{n-2}}\{1-(2n-5-p^2)\sin^2 x\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (y)$$

Ten einde verder op dezelfde wijze de functie F_2 te behandelen, noeme men kortheidshalve den eersten term in het tweede lid van de vergelijking (f')

$$\frac{\sin x\,.\cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) = R = \frac{\sin x\,.\cos x}{2(1+p^2)}\,\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}};$$

en differentieere vervolgens die vergelijking (f') nog eenmaal naar (p^2), zoo verkrijgt men

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_2 = \frac{d}{d(p^2)}R + \frac{1}{2p^4}F_2 - \frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)}E_2 - \frac{1}{2p^2}\left\{R - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2\right\} + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\,\frac{1}{2p^2}(E_2 - F_2)\,.\quad (z)$$

Daar nu echter in den eersten term van het tweede lid is

$$\frac{d}{d(p^2)}R = \tfrac{1}{2}\sin x\,.\cos x\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\left\{\frac{\sin^2 x}{1+(1+p^2)\sin^2 x} - \frac{1}{1+p^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{1+p^2\sin^2 x}\right\} =$$

$$= \frac{-\sin x\,.\cos x}{4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{\,3}}\{2+(1+3p^2)\sin^2 x + (1+p^2)^2\sin^4 x\} =$$

$$= \frac{-\sin x\,.\cos x}{4p^4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{\,3}}\{(1+p^2) - (2+3p^2-p^4)\text{[illegible]}\},$$

en dus, na substitutie in de vorige vergelijking,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_2 = F_2\left\{\frac{1}{2p^4}+\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\right\}-E_2\left(\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}+\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\right)-$$

$$-\frac{\sin x \,.\, \cos x}{4p^4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}\left\{(1+p^2)-(2+3p^2-p^4)(1+p^2\sin^2 x)+2(1+p^2)^2(1+p^2\sin^2 x)^2\right\} \,.\,.\, (z_1)$$

Daar in de coëfficiënt van E_2 de beide laatste termen elkander opheffen, moet slechts de eerste term worden verdreven, om de E_2 geheel te elimineeren. Tot dat einde telle men bij de vorige vergelijking (z)

$$\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_2 = \frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}E_2 - \frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)}F_2 + \frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}R,$$

zoodat men verkrijgt

$$\frac{d^2}{d(p^2)}F_2 + \frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_2 = F_2\left(\frac{1}{2p^4}+\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)}\right)+$$

$$+\left\{\frac{d}{d(p^2)}R + R\left(-\frac{1}{2p^2}+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\right)\right\} = -\frac{p^2}{4p^4(1+p^2)}F_2 + \left(\frac{d}{d(p^2)}R + \frac{1+3p^2}{2p^2(1+p^2)}R\right);$$

en hieruit leidt men verder af

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F_2 =$$

$$= \frac{\sin x \,.\, \cos x}{p^2(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}\left\{-(1+p^2)+(1-p^4)(1+p^2\sin^2 x)+(1+p^2)2p^2(1+p^2\sin^2 x)^2\right\} =$$

$$= \frac{\sin x \,.\, \cos x}{p^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}\left\{-1+(1-p^2)(1+p^2\sin^2 x)+2p^2(1+p^2\sin^2 x)^2\right\} =$$

$$= \frac{\sin x \,.\, \cos x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}\left\{\sin^2 x-(1+p^2\sin^2 x)+2(1+p^2\sin^2 x)^2\right\} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (z_2)$$

Thans kan men overgaan, om deze differentiaalformule n—2 maal te differentieeren, waarbij men weder gebruik heeft te maken van het theorema van LEIBNITZ, en van de reeds vroeger aangehaalde formulen voor herhaald differentieeren. Langs dien weg komt men dan tot de volgende uitkomst

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)\,4(1+2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,4\,.\,2\,.\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \qquad 4(1+2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \quad (n-2) \qquad 4\,.\,2\,.\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] F_2 =$$

$$= \sin x.\cos x\left\{-2\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + 2\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\},$$

waaruit verder na herleiding volgt

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-1)\,4(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F_2 =$$

$$= \sin x.\cos x\left\{-2\frac{(-1)^{n-1}1^{n-1/2}(\sin^2 x)^{n-1}}{2^{n-1}(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}} - \frac{(-1)^{n-2}1^{n-2/2}(\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{3}{2}}} + \sin^2 x\frac{(-1)^{n-3}1^{n-3/2}(\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{5}{2}}}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\sin x.\cos x(\sin^2 x)^{n-3}1^{n-3/2}}{2^{n-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\{-(2n-3)(2n-5)\sin^2 x - (2n-5)(1+p^2\sin^2 x) - 2(1+p^2\sin^2 x)^2\} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\sin^{2n-5}x.\cos x}{(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\,\frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}}[(2n-3)+\{(2n-3)(2n-5)+(2n-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x]\,..\,(aa)$$

11. Laat ons ter toepassing van enkele der vorige formulen, nog het derde differentiaalquotient ten opzichte van p^2 afleiden van de beide elliptische integralen der eerste en tweede soort. Zij daartoe in de vergelijking (q) $n=3$, zoo is

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^3}{d(p^2)^3} + 4(2-3p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2} - 3\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p..x) = -\frac{\sin^3 x\,.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}}\,\frac{1}{2}\,\{1-(1+p^2)\sin^2 x\}.$$

Daarbij volgt uit de vergelijkingen (p) en (o), overeenkomstig,

$$-4(2-3p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}E(p..x) = -4(2-3p^2)\left\{\frac{1}{2p^4}F(p..x) - \frac{2-p^2}{4p^4(1-p^2)}E(p..x) + \frac{\sin x\,.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{1-(1-p^2)\sin^2 x}{4p^2(1-p^2)}\right\},$$

$$3\frac{d}{d(p^2)}E(p..x) = \frac{3}{2p^2}\{E(p..x) - F(p..x)\}.$$

Wanneer men deze bij de eerste optelt, en dan door $4p^2(1-p^2)$ deelt, verkrijgt men

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}E(p..x) = \frac{3+5p^2-16p^4+6p^6}{8p^4(1-p^2)^2}E(p..x) - \frac{4-3p^2}{8p^4(1-p^2)}F(p..x) -$$

$$-\frac{\sin x\,.\cos x}{8p^4(1-p^2)^2}\left\{\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}} - \frac{7+p^2-5\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + [illegible](2-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}\,.\,.\,.\,[illegible]$$

Vervolgens neme men $n = 3$ in de vergelijking (s), dan is

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^3}{d(p^2)^3} + 8(1-2p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2} - 9\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p\,.\,x) =$$
$$= -\frac{\sin^3 x\,.\,\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,5}}\,\tfrac{1}{2}\left\{-3\sin^2 x + (1-p^2\sin^2 x) + 2(1-p^2\sin^2 x)^2\right\}.$$

Evenzeer volgt nu uit de vergelijkingen (r) en (b) achtereenvolgens

$$-8(1-2p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p\,.\,x) = -8(1-2p^2)\left[\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p\,.\,x) - \frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p\,.\,x) - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin x\,.\,\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}}\left\{(1-p^2) - (3-4p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x) + 2(1-p^2)^3(1-p^2\sin^2 x)^3\right\}\right],$$

$$9\frac{d}{d(p^2)}F(p\,.\,x) = \frac{9}{2p^2(1-p^2)}\left[-(1-p^2)F(p\,.\,x) + E(p\,.\,x) - p^2\frac{\sin x\,.\,\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\left\{\sin^2 x + (1-p^2\sin^2 x)\right\}\right].$$

Door middel van deze vergelijkingen verdwijnen de twee laatste termen uit het eerste lid; wanneer men daarop door $4p^2(1-p^2)$ deelt, komt er

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}F(p\,.\,x) = \frac{8-23p^2+23p^4}{8p^6(1-p^2)^3}E(p\,.\,x) - \frac{2+2p^2-3p^4}{8p^6(1-p^2)^2}F(p\,.\,x) - \frac{\sin x\,.\,\cos x}{8p^6(1-p^2)^3}\left\{\frac{3(1-p^2)^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,5}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(3+p^2)(1-p^4)}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}} + \frac{9-42p^2+32p^4+9p^6}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} - (1-p^2)^2(8-5p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\} \quad \ldots (ac)$$

12. Wat betreft de elliptische integralen van de derde soort, bedenke men, dat zij slechts van die der eerste soort verschillen door den factor $(1 - n\sin^2 x)^{-1}$ onder het integraalteeken; daar deze factor geene p bevat, hebben de bewerkingen van de vorige paragrafen daarop geen invloed; en is men derhalve voor deze integralen der derde soort teruggevoerd tot de vergelijkingen voor de functie $F(p\,.\,x)$.

Vervolgens kunnen wij nog het integreeren ten opzichte van de standvastige p^2 beproeven, maar dan verkrijgen wij, door verwisseling in de orde van het integreeren, hetgeen hier geoorloofd is,

$$\int d(p^2)E(p\,.\,x) = \int_0^x dx\int d(p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = \int_0^x dx\frac{-2}{3\sin^2 x}\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3} = -\frac{2}{3}\int_0^x \sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\int d(p^2)F(p\,.\,x) = \int_0^x dx\int d(p^2)\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \int_0^x dx\frac{-2}{\sin^2 x}\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = -2\int_0^x \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Beide uitkomsten zijn ondoorloopende integralen, omdat de functie onder het integraalteeken voor de benedenste grens $u = 0$ een eindigen teller bezit, terwijl daarentegen de noemer, $sin^2 x$, nul wordt. Langs dezen weg kan men dus niet tot bruikbare uitkomsten geraken.

13. Veel eenvoudiger worden de vorige uitkomsten, wanneer men de integralen tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ neemt, waardoor zij tot bepaalde integralen worden. In dat geval toch worden de vergelijkingen (a) en (b), (c) en (d)

$$\frac{d}{d(p^2)} E(p) = \frac{1}{2p^2} \{E(p) - F(p)\}, \quad \ldots \ldots \quad (A)$$

$$\frac{d}{d(p^2)} F(p) = \frac{1}{2p^2(1-p^2)} \{E(p) - (1-p^2) F(p)\}, \quad \ldots \ldots \quad (B)$$

$$\left[1 - 2p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right] E(p) = F(p), \quad \ldots \ldots \quad (C)$$

$$\left[1 - 2p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right] F(p) = \frac{1}{1-p^2} E(p). \quad \ldots \ldots \quad (D)$$

Bij de vergelijkingen (e) en (f), (g) en (h) wordt

$$E_1 = \left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{\pi}{2} - x\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\pi} = +E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \ldots \quad (\delta_1)$$

$$F_1 = \left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{\pi}{2} - x\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\pi} = +F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right); \ldots \quad (\varepsilon_1)$$

zoodat zij leveren

$$\frac{d}{d(p^2)}\left[\sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2) E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \ldots \quad (E)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \ldots \quad (F)$$

$$\left[1 - 2p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right]\left\{\sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \ldots \ldots \quad (G)$$

$$\left[1 + 2p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right]\left\{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\} = \sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right); \ldots \ldots \quad (H)$$

terwijl verder uit de volgende vergelijkingen (e_1) en (f_1), (g_1) en (h_1) wordt afgeleid

$$\frac{d}{d(p^2)} \cdot E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \quad \ldots \ldots \ldots (E_1)$$

$$\frac{d}{d(p^2)} \cdot F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \quad \ldots (F_1)$$

$$\left[1 - 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad \ldots \ldots \ldots (G_1)$$

$$\left[1 + 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = (1+p^2)\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad \ldots \ldots \ldots (H_1)$$

Behouden wij de notatiën voor de bewerkingen

$$[1 - p^2]\left[1 + 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right] = P, \ldots (\zeta), \text{ en } \left[1 - 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right] = Q; \ldots \ldots (\eta)$$

dan geven de vergelijkingen (i_3) en (i_4), (k_2) en (k_3)

$$[Q.P.Q \ldots Q.P.Q]\, E(p) = F(p), \quad \ldots \ldots \ldots (I_3)$$

$$[P.Q.P \ldots Q.P.Q]\, E(p) = E(p), \quad \ldots \ldots \ldots (I_4)$$

$$[P.Q.P \ldots P.Q.P]\, F(p) = E(p), \quad \ldots \ldots \ldots (K_2)$$

$$[Q.P.Q \ldots P.Q.P]\, F(p) = F(p); \quad \ldots \ldots \ldots (K_3)$$

terwijl bij het behoud der notatie

$$[1 + p^2]\left[1 + 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right] = P_1. \quad \ldots \ldots \ldots (\mu)$$

de vergelijkingen (l_1) en (l_2), (m_1) en (m_2) geven, omdat hier wordt,

$$E_2 = \sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad \ldots \ldots \ldots (\iota_1)$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\, F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad \ldots \ldots \ldots (\varkappa_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \ldots Q.P_1.Q]\left[\sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \ldots (L_1)$$

$$[Q.P_1.Q \;.\;.\;.\; Q.P_1.Q]\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \;.\; (L_2)$$

$$[Q.P_1.Q \;.\;.\;.\; P_1.Q.P_1]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \;.\;.\; (M_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \;.\;.\;.\; P_1.Q.P_1]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \;.\;.\; (M_2)$$

En eindelijk, indien men de bewerkingsnotatiën

$$\left[1 - 2\,p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = R, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\nu)$$

$$\left[\frac{1}{1+p^2}\right]\left[1 + 2\,p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = S \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\xi)$$

behoudt, leidt men uit de vergelijkingen (n_1) en (n_2), (o_1) en (o_2) af

$$[S.R.S \;.\;.\;.\; R.S.R]\; E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (N_1)$$

$$[R.S.R \;.\;.\;.\; R.S.R]\; E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (N_2)$$

$$[R.S.R \;.\;.\;.\; S.R.S]\; F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (O_1)$$

$$[S.R.S \;.\;.\;.\; S.R.S]\; F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (O_2)$$

Verder leveren de vergelijkingen (p) en (p_1), (r) en (r_1)

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E(p) = \frac{1}{4\,p^4(1-p^2)}\left\{2\,(1-p^2)\,F(p) - (2-p^2)\,E(p)\right\}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (P)$$

$$\left[4\,p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)} + 4\,(1-p^2)\frac{d}{d(p^2)} + 1\right]E(p) = 0, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (P_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p) = \frac{1}{4\,p^4(1-p^2)^2}\left\{(2-3\,p^2)\,F(p) - 2\,(1-2\,p^2)\,E(p)\right\}, \;.\;.\;.\;.\; (R)$$

$$\left[4\,p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)} + 4\,(1-2\,p^2)\frac{d}{d(p^2)} - 1\right]F(p) = 0, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (R_1)$$

en de meer algemeene differentiaalformulen (q) en (s)

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4\{(n-1)-(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{1-4(n-2)^2\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E(p)=0, \ . \ (Q)$$

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}-\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F(p)=0. \ . \ (S)$$

Vervolgens genaderd tot de vergelijkingen (t) en (t_1), (v) en (v_1), komt er naar de formulen (δ_1) en (ε_1)

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}\left\{2(1+2p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(2+5p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \ . \ (T)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0, \ . \ . \ . \ . \ . \ (T_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \ . \ . \ . \ (V)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0; \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (V_1)$$

en naar de meer algemeene differentiaalformulen (u) en (w)

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\{(2n-3)p^2+(n-1)(1+p^2)\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+\{1+4(n-2)[(n-2)p^2+(2n-3)(1+p^2)]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0, \ . \ . \ (U)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{(2n-3)(1+p^2)+(n-2)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+\{1+4(n-2)[(n-2)(1+p^2)+(2n-5)p^2]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0. \ . \ . \ (W)$$

Even zoo geven de volgende vergelijkingen (x) en (x_1), (z) en (z_1), wanneer men de formulen (ι_1) en ($\varkappa_1$) gebruikt,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{2F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(1+2p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}. \ . \ (X)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0, \quad \ldots\ldots \quad (X_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{4p^4\sqrt{1+p^2}^{\,5}}\left\{(3+2p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-2(1+2p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \ldots (Z)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0; \quad \ldots \quad (Z_1)$$

en de meer algemeene differentiaalformulen (y) en (aa)

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4\{(n-1)+(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{4(n-2)^2-1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]$$
$$\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (Y)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (AA)$$

Ten slotte geven de waarden (ab) en (ac) nog hier

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}E(p)=\frac{1}{8p^4(1-p^2)^2}[(3+5p^2-16p^4+6p^6)E(p)-(1-p^2)(4-3p^2)F(p)], \ldots (AB)$$

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}F(p)=\frac{1}{8p^6(1-p^2)^3}[(8-23p^2+23p^4)E(p)-(2+2p^2-3p^4)F(p)]. \quad \ldots \quad (AC)$$

Men had alle formulen van deze paragraaf, ook rechtstreeks, en op zich zelve beschouwd, veel gemakkelijker kunnen vinden, als men de integralen (1) tot (12) tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ neemt, en deze als punt van uitgang neemt voor de volgende beschouwingen.

SUR

QUELQUES ESPÈCES INÉDITES OU PEU CONNUES DE

POISSONS DE CHINE

APPARTENANT AU MUSÉUM DE HAMBOURG,

PAR

P. BLEEKER.

Depuis le dernier recensement des espèces de poissons de Chine *, d'après lequel leur chiffre ne montait pas encore à 900, plus de cent espèces ont été ajoutées à cette faune, résultat qu'on doit surtout aux recherches de MM. Günther et Sauvage.

Tout récemment, dans un envoi de poissons indéterminés, faisant partie des collections du Muséum Zoologique de Hambourg, je trouvai 72 espèces recueillies en Chine, dont 21 sont nouvelles pour sa faune. Par cet envoi je suis à même de porter le nombre des espèces actuellement connues de Chine à plus de 1030.

Les espèces du Muséum de Hambourg sont les suivantes. Celles marquées d'un astérisque, n'étaient pas connues jusqu'ici de Chine. Je n'en trouve indiquées les localités précises que pour une vingtaine, presque toutes d'eau douce et trouvées à Shanghai. Cinq seulement me paraissent inédites, sav. Pseudosciaena polyactis,

* Mémoire sur la faune ichthyologique de Chine; et Addition à ce Mémoire. Nederl. Tijschr. Dierkunde 1872. IV p. 113 et 232.

Acanthocepola oxylepis, Cyclocheilichthys sinensis, Salmo leptosoma et Salmo pomatops.

Cynocephalus (Scoliodon) macrorhynchus Blkr = Trygon zugei MH.
* Pseudoscarus aeruginosus Blkr.
* „ rivulatus Blkr.
* Julis melanochir Blkr
Epinephelus fasciatus Blkr.
„ merra Blkr.
Siniperca chuatsi Gill. — Hab. Shanghai.
Lateolabrax japonicus Blkr.
Caesio coerulaureus Lac.
Scolopsis margaritifer CV.
Synagris hypselosoma Blkr. — Hab. Shanghai.
Lutjanus chirtah Blkr.
* „ chrysotaenia Blkr.
* Pseudosciaena polyactis Blkr. — Hab. Shanghai.
Upeneus tragula Rich.
Parupeneus multifasciatus Blkr.
Glyphidodon coelestinus CV.
* Hemiglyphidodon plagiometopon Blkr.
Pseudosphromenus opercularis Blkr. — Hab. Shanghai.
Ophiocephalus striatus Blkr.
* „ lucius K. V. H. — Hab. Shanghai.
Scomber janesaba Blkr.
* Caranx crumenophthalmus Lac.
* Selaroides leptolepis Blkr.
Gempylus coluber CV. — Hab. Shanghai.
* Trichiurus japonicus Blkr.
* Acanthocepola oxylepus Blkr.
Theuthis virgata Günth.
Balistes (Canthidermis) oculatus Blkr.
Mugil cephalotus CV.
* „ ceramensis Blkr.
„ haematochilus Schl.
Solenostomus serratus Gill = Fistularia serrata Günth.
Polycaulus elongatus Günth.
Lepidotricha Burgeri Günth.
Bostrychus sinensis Lac.

Odontobutis obscura Blkr. — Hab. Shanghai.
Glossogobius giuris Blkr = Gobius giuris HB.
Actinogobius ommaturus Blkr.
Boleophthalmus pectinirostris Rich.
* Pseudorhombus polyspilus Blkr.
* Achirus pavoninus Lac.
Pelteobagrus calvarius Blkr. — Hab. Shanghai.
Plotosus arab Blkr.
Clarias magur CV.
Misgurnus anguillicaudatus Günth.
Carassius auratus Blkr. — Hab. Shanghai.
* Cyclocheilichthys (Cyclocheilichthys) sinensis Blkr.
Sarcocheilichthys sinensis Blkr. — Hab. Shanghai.
Pseudogobio rivularis Blkr. — Hab. Shanghai.
Saurogobio Dumerili Blkr.
Rhodeus sinensis Günth. — Hab. Shanghai.
Acanthorhodeus taenianalis Günth. — Hab. Shanghai.
Leuciscus idellus Val. — Hab. Shanghai.
Parabramis bramula Blkr. — Hab. Shanghai.
Culter brevicauda Günth. — Hab. Shanghai.
Hypophthalmichthys molitrix Blkr (nec. Blkr Mém. Cypr. Chin.) * Hab. Shanghai.
„ nobilis Blkr (nec Blkr, Mém. Cypr. Chin. — Hab. Shanghai.
* Saurida nebulosa Val.
* Salmo leptosoma Blkr.
* „ pomatops Blkr.
Dussumieria acuta Val.
* Clupea (Harengula) fimbriata Blkr.
Coilia clupeoides Günth. — Hab. Shanghai.
* Exocoetus bahiensis Rang. — Hab. Shanghai.
„ obtusirostris Günth. — Hab. Shanghai.
* Parexocoetus mento Blkr.

* Après avoir pu examiner les vrais Hypophthalmichthys molitrix et nobilis, je suis d'avis, que les espèces, décrites et figurées sous ces noms dans le „Mémoire sur les Cyprinoïdes de Chine" sont des espèces distinctes, qui méritent de reprendre les noms que leur avait déjà appliqué Guichenot, le molitrix du dit mémoire étant le Dabryi Guich. et le nobilis le Simoni Guich.

Muraena japonica Blkr = Anguilla bostoniensis Les. sec. Günth.
Pisoodonophis cancrivorus HG.
Monopterus javanensis Lac.
Chonerhinos * naritus Blkr = Xenopterus auritus Günth.
Tetraodon ocellatus Günth.

Siniperca Muatsi Gill, Proc. Ac. Phil. 1862 p. 16; Kner, Zool. **Reiz. Novara, Fisch. p. 15 tab. 1, fig. 3.**

Siniperca corpore oblongo compresso, altitudine 3 fere ad $3\frac{3}{5}$ in ejus longitudine absque, $3\frac{3}{5}$ ad 4 et paulo ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis 2 ad $2\frac{3}{5}$ in ejus altitudine; capite acuto $2\frac{1}{2}$ ad 3 fere in longitudine corporis absque, 3 ad $3\frac{3}{5}$ in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{1}{2}$ ad $1\frac{3}{5}$, latitudine capitis $2\frac{1}{3}$ ad $3\frac{1}{3}$ in ejus longitudine; oculis diametro $4\frac{3}{4}$, 5 ad 6 in longitudine capitis, diametro $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{5}$ distantibus; linea rostro-frontali rostro convexa vel convexiuscula, fronte concava; rostro acuto absque maxilla oculo paulo breviore; naribus ante pupillam perforatis anterioribus valvula elevata claudendis; maxilla superiore maxilla inferiore conspicue breviore, post oculi marginem posteriorem desinente, $2\frac{1}{4}$ circ. in longitudine capitis; dentibus parvis, intermaxillaribus symphysialibus ceteris longioribus, vomerinis in thurmam triangularem, palatinis utroque latere in vittam elongatam antice quam postice latiorem dispositis; squamulis capite regione posttemporali, operculo et suboperculo tantum; praeoperculo postice conspicue serrato, angulo et inferne spinis 4 inferioribus 2 ceteris fortioribus deorsum et paulo antrorsum directis; operculo spinis 2, superiore obtusa, inferiore pungente; linea laterali valde curvata; squamis angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 130 circ., infra lineam lateralem in series 120 circ. transversas dispositis; squamis serie transversa

* Le nom générique n'a pas été adopté dans le „Catalogue of Fishes, puisque, selon l'auteur, le genre, bien que le premier nommé par moi, n'aurait pas été décrit ou caractérisé. Le fait est que, en l'an 1854 déjà (Natuurk. Tijdschr. Ned. Ind. VII p. 259), j'ai indiqué le genre Chonerhinos dans les termes suivants: „trechtervormige verdieping ter plaatse der neusopeningen, met verheven randen; lange rug- en aarsvinnen; zichtbare zijlijn; ongekielde rug" (loco narium depressio infundibuliformis marginibus elevatis; pinnae dorsalis et analis elongatae; linea lateralis conspicua; dorsum non carinatum).

85 circ. spinam ventralem inter et spinam dorsi anteriorem, 25 circ. apicem curvaturae lineae lateralis inter et spinas dorsi medias; pinna dorsali: parte spinosa dorsali radiosa duplo circ. longiore, alepidota, spinis validis mediis ceteris longioribus oculo duplo circ. longioribus, postica radio 1° duplo circ. breviore; dorsali radiosa basi squamata, dorsali spinosa paulo altiore, obtuse rotundata; pectoralibus obtuse rotundatis capitis parte postoculari paulo brevioribus; ventralibus pectoralibus paulo brevioribus acutiuscule rotundatis, spina valida sulcata oculo paulo longiore; anali basi squamata, spina media ceteris et oculo sat multo longiore, parte radiosa vix humiliore obtuse rotundata; caudali obtuse rotundata capitis parte postoculari vix ad non breviore; colore corpore superne violascente-viridi vel olivascente, lateribus aureo-argenteo; iride viridi-violascente margine pupillari aurea; vitta oculo supra operculo-dorsali nigricante; spinas dorsales praemedianas attingente trunco maculis magnis nigricante-fuscis irregularibus et inaequimagnis ex parte vittas vel fascias transversas efficientibus; pinnis flavis, imparibus maculis et guttis nigris irregulariter pluriseriatis.

B. 7. D. 12/14 vel 12/15. P. 2/14 vel 2/15. v. 1/5. et 3/9 ad 3/11. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Perca chuatsi* Basil, Ichth. Chin. bor., Nouv. mém. Soc. impér. Natur. Mosc., X. Ichth. Chin. bor. p. 218 Tab. 1 fig. 1; Canestr. Syst. Percoid. Verh. 2.6. Ges. W. X. p. 30 cubi gen. nov. indic.

Perca chuantsi Basil., ib. p. 218 tab. 2 fig. 1.

Siniperca chuantsi Gill., Proc. Ac. Phil. 1862 p. 16.

Plectroperca Berendtii Pet., N. Percoidgatt, Monatsb. k. pr. Ak. wis., 1864 p. 121.

Siniperca matraki Guich.

Hab. China (Shanghai); Japonia.

Longitudo 4 speciminum 208‴ ad 340.‴

Rem. Ler Siniperca chuatsi et chuantsi ne forment qu'une seule espèce, le chuantsi ne représentant qu'une variété ou variation à corps moins raccourci et à dos moins élevé. J'ai devant moi quatre individus, deux du chuatsi de 235‴ et 340‴ et deux du chuantsi de 208‴ et 314″ de long, mais je ne puis y découvrir aucun caractère essentiel qui justifiait leur séparation spécifique.

Pseudosciaena polyactis Blkr. — Tab. 1 fig. 1.

Pseudosciaena corpore oblongo compresso, altitudine 4 circ. in ejus longitudine absque, 5 circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis

$1\frac{1}{6}$ circ. in ejus altitudine, capite obtusiusculo $3\frac{1}{2}$ circ. in longitudine corporis absque, $4\frac{1}{2}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{4}{5}$ circ., latitudine capitis 2 circ. in ejus longitudine; oculis oblongiusculis, diametro $3\frac{3}{5}$ circ. in longitudine capitis, diametro $1\frac{1}{5}$ circ. distantibus; linea rostro-frontali rostro convexa fronte convexiuscula; linea interoculari convexa; naribus ante pupillam perforatis, rostro convexo obtusiusculo oculo paulo breviore, apice ante pupillae partem inferiorem sito, non ante os prominente, margine libero incisura et apice poris conspicuis nullis; maxillis subaequalibus, superiore inferiore vix breviore, sub oculi margine posteriore desinente, minus quam 2 in longitudine capitis; maxilla inferiore utroque latere symphysin versus poro parvo conspicuo: dentibus maxillis antice pluriseriatis lateribus pluri-ad biseriatis, dentibus intermaxillaribus serie vel seriebus internis minimis, serie externa mediocribus conicis distantibus portrorsum longitudine sensim decrescentibus anticis subcaninoideis; dentibus mandibularibus serie vel seriebus externis minimis, serie interna conicis mediocribus distantibus inaequilongis postrorsum longitudine accressentibus posterioribus intermaxillaribus serie externa posterioribus non brevioribus symphysin dente curvato subcaninoideo; rictu valde obliquo; osse praeorbitali sub medio oculo oculi diametro longitudinali duplo circ. humiliore; praeoperculo limbo oculi diametro vix graciliore, margine libero postice et inferne leviter denticulato; operculo spinis 2 debilibus non vel vix pungentibus; lobo suprascapulari lato conspicue dentato-fimbriato; linea laterali parum curvata, singulis squamis tubulo postice valde arborescente notata; cauda parte libera aeque longa circ. ac postice alta; squamis capite ex parte cycloideis, trunco ctenoideis; squamis angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis 60 circ. in linea laterali, supra lineam lateralem in series 70 circ. infra lineam lateralem in series 60 circ. transversas dispositis; squamis serie transversa 29 circ. basin pinnae ventralis inter et dorsalem spinosam, 5 vel 6 circ. lineam lateralem inter et spinas dorsales anteriores et medias; pinna dorsali partem spinosam inter et radiosam usque ad basin fere incisa; dorsali spinosa corpore plus duplo humiliore, sat multo longiore quam alta, spinis gracillimis rigidiusculis 3° et 4° ceteris longioribus capitis parte postoculari brevioribus; dorsali radiosa dorsali spinosa triplo circ. longiore et non vel vix humiliore, basi tantum squamata; pinnis pectoralibus acutis et caudali romboideo-acuta capite non vel vix brevioribus; ventralibus acutis capite absque rostro brevioribus; anali obtusiuscula convexe basi squamata dorsali radiosa altiore et corpore paulo minus duplo humiliore, longitudine plus quam 5 in longitudine dorsalis radiosae, spinis gracilibus 2ª. oculo breviore radio 1°. triplo circ. breviore; colore corpore superne grisea vel coerulescente-

viridi, lateribus et inferne argenteo; iride flavescente, pinnis flavescentibus, imparibus fusco plus minusve arenatis.

B. 7. D. 9—1/36 vel 9—1/37. P. 2/14. v. 1/5. et 2/9 vel 2/w. C. 1/15/1 et lat. brev.

Hab. China (Shanghai).

Longitudo speciminis unici 280'''.

Rem. Cette espèce est voisine du Pseudosciaena amblyceps Blkr. d'Amoy (Ned. T. Dierk. I. p. 143) mais dans l'amblyceps, décrit sur 6 individus de 126''' jusqu'à 295''', la dorsale n'est soutenue que par 33 rayons, les pectorales et l'anale y ont un rayon de moins et la tête y mesure presque 5 fois dans la longueur totale. J'y trouve encore le museau plus court et muni d'un grand pore, 55 écailles dans la ligne latérale, 75 rangeés transverses d'écailles au dessus de la ligne latérale, huit rangées d'écailles entre la ligne latérale et les épines dorsales antérieures, etc.

Hemiglyphidodon Blkr.

Dentes: maxillis biseriati, serie externa compressi, incisivi truncati, pharyngeales minutissimi superiores in thurmas oblongo rotundatas, inferiores in thurmam transversam oblongo-quadratiusculam dispositi. Os pharyngeale inferius quadrangulare margine posteriore convexo. Corpus oblongum. Rostrum superne squamatum. Ossa suborbitalia et praeoperculum scabriuscula, operculum angulo spinula unica. Squamae trunco 28 circ. in serie longitudinali. Pinnae: impares radiis productis nullis, dorsalis spinis 13 et radiis 13 ad 15, parte spinosa parte radiosa plus duplo longiore membrana inter singulas spinas profunde incisa; analis radiosa dorsalis radiosa longior, radiis 14 ad 16; caudalis leviter emarginata.

Rem. Le type, établi comme sousgenre de Glyphidodon, mérite une place comme genre distinct. Les dents aux deux mâchoires, décrites comme unisériales, sont en effet bisériales, mais celles de la rangée interne très grêles, pointues, beaucoup plus courtes que celles de la rangée externe et intercalées entre ces derniéres, ne s'observent qu'à l'aide d'une loupe. La scabrosité des os sousorbitaire et du preopercule indiquent son affinité avec les Pomacentres, mais le type est éminemment caractérisé par la dentition pharyngienne, par l'os pharyngien inférieur quadrangulaire à branches latérales très-raccourcies et élévées, par les dents pharyngiennes très-petites et innombrables formant un velours très-fin. Le type a sa place naturelle à côté du genre Dischistodus, dont il se distingue par la den-

tion pharyngienne, par la tête plus haute que longue, par l'écaillure du museau, et par les échancrures de la membrane de la dorsale épineuse. La seule espèce connue est assez voisine du Dischistodus prosopataenia.

Hemiglyphidodon plagiometopon **Blkr. Mém. Pomac. Ind. arch. Ind. p. 11; Atl. Ichth. tab. 410. Pomac. tab. II, fig. 4.**

Les deux individus de Chine mésurant 135‴ et 158‴, se distinguent de ceux de l'Insulinde par un rayon de moins à la dorsale et aux pectorales. Ils ont le préorbitaire fort raboteux, les scabrosités du bord des sousorbitaires et du préopercule assez prononcées et la 2e épine anale plus faible.

L'anale molle est un peu plus longue que la dorsale molle, mais je retrouve ce caractère aussi dans les individus indo-archipélagiques.

Acanthocepola Blkr. — Tab. 2, fig. 1.

Acanthocepola, corpore elongato valde compresso altidunine $7\frac{1}{2}$ circ. in ejus longitudine absque, $8\frac{1}{3}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis antice 2 fere in ejus altitudine, usque ad apicem caudae sensim diminuente; capite obtuso convexo $7\frac{1}{2}$ circ. in longitudine corporis absque, $8\frac{1}{3}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; duplo fere altiore quam lato, paulo longiore quam alto; oculis diametro $3\frac{2}{8}$ circ. in longitudine capitis, diametro $\frac{1}{2}$ circ. distantibus; linea interoculari rectiuscula; rostro convexo oculo plus duplo breviore, apice ante pupillam sito; naribus ante mediam pupillam perforatis; maxillis subaequilongis; superiore usque ante oculum adscendente et sub pupillae parte posteriore desinente; dentibus maxillis distantibus inaequilongis conicis obtusis caninis vel caninoideis nullis, intermaxillaribus utroque latere 16 circ., mandibularibus utroque latere 10 circ.; rictu valde obliquo; praeoperculo obtuse rotundato, limbo sat lato alepidoto, ante limbum squamis in series 9 circ. transversas dispositis, margine libero superne crenulato, angulo et inferne dentato, dentibus spinaeformibus inferioribus distantibus deorsum spectantibus; operculo superne squamulis deciduis; squamis capite superne nullis, trunco sessilibus non ciliatis sed margine posteriore libero acutangulis et medias lateribus praesertim incisuris tri-ad septem-partitis; seriebus squamarum regularibus, longitudinalibus subhorizontalibus, transversis obliquis antrorsum descendentibus; squamis angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis in series 160 circ. transversas dispositis; squamis 40 circ. in serie transversa initium pinnae analis

inter et pinnam dorsalem; linae laterali usque sub radio dorsali 4° vel 5° valde adscendente, porro lineae dorsali maxime approximata; pinnis imparibus continuis; pinna dorsali supra angulum operculi incipiente corpore plus duplo humiliore postrorsum altitudine sensim accrescente; pectoralibus obtusis capite absque rostro brevioribus; ventralibus ante basin pectoralium insertis pectoralibus brevioribus, acutis radio 1° subfiligero; anali sub apice pectoralium et sub radio dorsali 9° circ. incipiente dorsali paulo humiliore; caudali acuta capite non vel vix breviore; colore corpore pulchre roseo maculis vel fasciis conspicuis nullis; iride flavescente; pinnis roseis vel flavescente-roseis, verticalibus fusco vel nigricante marginatis, maculis distinctis nullis.

B. 6. D. 78 + A. 70 + A. 12 = D. A. C. 160 circ. omn. simpl. P. 2/16 apice fiss. V. 1/5 fiss.

Hab. China.

Longitudo speciminis descripti 145‴.

Rem. L'espèce tient le milieu, par ses formes, entre l'Acanthocepola abbreviata et l'Acanthocepola Krusensterni. Elle est remarquable par les dents obtuses plus ou moins tronquées ou arrondies aux deux mâchoires et par la forme des écailles, qui ont le bord postérieur divisé en trois jusqu'à sept points dont la médiane est toujours la plus forte. L'Acanthocepola Krusensterni a le corps plus allongé (hauteur 10 à 11 fois dans la longueur totale), la tête plus petite (10 à 11 fois dans la longueur totale), les dents acérées et les intermaxillaires plus nombreuses, le bord libre des écailles indivisé, etc. L'oxylepis ne peut pas être non plus confondu avec l'abbreviata *, où les dents sont aussi plus longues, plus pointues et plus nombreuses, les épines préoperculaires plus fortes et les écailles arrondies.

L'espèce de Chine indiquée par Swainson (Nat. hist. Fish. II. p. 402), sous le nom de Cepola variegata, ne peut pas être non plus l'oxylepis, puisqu'il en est dit dans la description, du reste trop superficielle, que la forme du corps

* Le Cepola abbreviata CV. est établi sur deux dessins, laissés par Mertens et Kuhl et Van Hasselt, et qui probablement ont rapport à deux espèces distinctes, puis qu'il en est dit que les nombres comptés par Mertens sont = D. 156. A. 76. P. 18; nombres qui sont traduits sur le dessin original de Kuhl et Van Hasselt = D. 72. A. 68. P. 12. — J'entends, sous le nom d'abbreviata, l'espèce figurée sous les yeux des derniers naturalistes, et dont je possède un individu trop mal conservé et trop mutilé pour permettre une comparaison rigoureuse avec l'oxylepis. C'est probablement aussi cette espèce publiée par Cantor sous le nom de Cepola abbreviata (Cat. Mal. Fish. p. 178.)

n'y présente pas „d'obvious difference from the Cepola rubescens", ce qui fait penser que cette espèce doit être plus voisine du Cepola Schlegeli que de l'Acanthocepola abbreviata auquel la rapporte Cantor. Une autre espèce de Chine, le Cepola hungta Rich., n'est connue que par une figure et paraît plus voisine de l'Acanthocepola Krusensterni Blkr que de l'oxylepis. Le Cepola abbreviata Day (Fish. Ind. p. 324 tab. 68 fig. 4) enfin me paraît distinct tant de l'abbreviata CV. que de l'oxylepis, ayant le corps plus allongé et la tête plus courte * M. Day en donne la formule des rayons = D. 67—74. P. 19. A. 67—74, mais ni celle des dents ni celle des écailles et ni aussi la forme des dents et des écailles.

Il paraît que les espèces de la famille des Cépoloïdes sont assez nombreuses. Celles qu'on trouve dans les auteurs sont généralement encore mal connues, et les descriptions dressées souvent sur des individus uniques et d'une conservation imparfaite laissent beaucoup à désirer.

Une révision des espèces sera nécessaire dès qu'on pourra disposer de matériaux plus nombreux et bien conservés.

Cyclocheilichthys (*Cyclocheilichthys*) *sinensis* Blkr Tab. 1 fig. 2.

Cycloch. (Cycloch.) Corpore oblongo compresso, altitudine 3 et paulo in ejus longitudine absque, 4 circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis $2\frac{1}{4}$ circ. in ejus altitudine; capite acuto $3\frac{3}{4}$ circ. in longitudine corporis absque, $4\frac{3}{4}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{2}{5}$ circ., latitudine capitis 2 fere in ejus longitudine; linea rostro-dorsali nucham inter et frontem rectiuscula vel concaviuscula, nucha leviter convexa; oculis diametro $3\frac{1}{3}$ circ. in longitudine capitis, paulo plus diametro 1 distantibus; diametro $1\frac{1}{3}$ circ. in capitis parte postoculari; membrana palpebrali iridis partem externam tantum tegente; antice et superne quam postice latiore; distantia rostri apicem inter et nucham 2 in distantia occiput inter et radium dorsalem posticum; fronte inter oculos depressiuscula; rostro conico acutiusculo oculo breviore vix ante os prominente; naribus ante pupillae partem superiorem perforatis orbitae multo magis quam rostri apici approximatis, posterioribus anterioribus majoribus valvula

---

* La discription dit „length of head 6 to 7 in the total length", mais la figure représente la tête beaucoup plus courte et mesurant presque 9 fois dans la longueur totale. La description de M. Day est prise peut-être sur une espèce différente de celle qui à servi de modèle à la figure publiée et qu'on pourrait nommer provisoirement Acanthocepola Dayi.

subclaudendis; osse praeorbitali oblongo-trigono, minus duplo longiore quam alto, margine posteriore subverticali convexo, apice acutiusculo antrorsum spectante, dimidio inferiore crista longitudinali subhorizontali percurso; osse suborbitali 2° oblongo-tetragono antice quam postice altiore, duplo circ. longiore quam alto, osse praeorbitali duplo circ. humiliore; maxilla superiore maxilla inferiore longiore verticaliter deorsum valde protractili, vix ante oculum vel sub oculi margine anteriore desinente, $3\frac{1}{2}$ circ. in longitudine capitis; rictu parum obliquo; cirris gracilibus supramaxillaribus quam rostralibus longioribus oculo duplo circ. brevioribus; maxilla inferiore symphysi tuberculo conico obtuso; labiis mediocribus teretibus, transversim rugosis; operculo latitudine $1\frac{1}{2}$ circ. in ejus altitudine, margine inferiore rectiusculo; apertura branchiali sub praeoperculi margine posteriore desinente; dentibus pharyngealibus uncinato-subcochleariformibus 2.3.5 4.3.2, internis 2 vel 1 serie majore conicis apice acuminatis facie masticatoria concava nulla; osse scapulari trigono apice leviter rotundato; dorso elevato angulato ventre altiore; ventre post pinnas ventrales rotundato non carinato; cauda altitudine minima plus quam 2 in longitudine capitis; squamis dimidio libero et vulgo etiam dimidio basali longitudinaliter striatis, 35 vel 36 in linea laterali, 11 in serie transversa dorsalem inter et ventrales infimis quarum 5 vel $5\frac{1}{2}$ supra, $3\frac{1}{2}$ infra lineam lateralem, 10 vel 11 in serie longitudinali occiput inter et pinnam dorsalem, ventre infimo longitudinaliter triseriatis serie media postrorsum magnitudine sensim accrescentibus posticis iis seriebus lateralibus majoribus linea laterali vix curvata antice tantum parum declivi vix infra lineam rostro-caudalem descendente, singulis squamis tubulo simplice notata; pinna dorsali supra basin ventralium incipiente acuta emarginata corpore paulo humiliore, minus duplo altiore quam basi longa, spina crassa postice dentibus valde conspicuis serrata capite non longiore $3\frac{3}{4}$ circ. in longitudine corporis absque pinna caudali; pectoralibus et ventralibus acutis subaequilongis capite absque rostro paulo brevioribus, pectoralibus ventrales subattingentibus, ventrales analem non attingentibus; anali acuta emarginata, dorsali minus duplo humiliore, duplo circ. altiore quam basi longo radio simplice tertio gracili basi tantum ossea; pinna caudali basi tantum squamata, profunde incisa lobis acutis capite non brevioribus? (mutilatis); colore corpore superne viridi, inferne argenteo; iride flavescente; pinnis flavescentibus; dorsali superne et caudali postice fusco arenatis.

B. 3. D. 4/8 vel 4/9. P. 1/17. V. 1/9. A. 3/5 vel 3/6. C. 7/17/6 circ.

Hab. China.

Longitudo speciminis descripti 150‴ circ.

Rem. Cette espèce est fort voisine du Cyclocheilichthys (Cyclocheilichthys) ar-

matus Blkr mais bien distincte par les cinq rangées longitudinales d'écailles au dessus de la ligne latérale, par sa tête qui est relativement plus longue, par sa queue moins haute, etc. C'est la seule espèce du genre, jusqu'ici connue, de Chine.

Pseudogobio rivularis Blkr, Mém. Cyprin. Chin. p. 23 tab. 8 fig. 1.
Syn. *Gobio rivularis* Bas., Ichth. Chin. bor., Nouv. Mém. Soc. Nat. Mosc. X p. 231.
Tylognathus sinensis Kner, Zool. Novara Fisch. p. 354 tab. 15 fig. 5.
Pseudogobio sinensis Günth., Cat. Fish. VII p. 175; Rep. Coll. Fish. Chin. Ann. n. h. 4h ser. XII p. 247.

Rem. Dans ma description citée il s'est glissé une erreur d'impression, le nombre des écailles y étant donné „ = 55 ou 56" ce qui doit être lu 35 ou 36. La longueur de l'individu décrit n'était aussi que de 75‴ et non de 175‴ comme l'a fait l'imprimeur.

J'ai devant moi un individu parfaitement conservé de 125‴ de long. J'y trouve le corps un peu plus haut, la tête et le corps couverts par des taches foncées plus nombreuses et la dorsale plus régulièrement arrondie. On n'y voit plus rien de la tache caudale noirâtre. Ces particularités ont été aussi trouvées sur les adultes par M. Günther.

Acanthorhodeus taenianalis Günth., Rep. Coll. Fish. China, Ann. nat. hist. 4me sér. XII p. 247. — Tab. 1 fig. 3.

Acanthorh. corpore subrhomboideo compresso, altitudine $2\frac{1}{6}$ circ. in ejus longitudine absque pinna caudali; latitudine corporis $3\frac{1}{2}$ circ. in ejus altitudine; capite obtuso $4\frac{1}{2}$ circ. in longitudine corporis absque pinna caudali; altitudine capitis 1 et paulo, latitudine capitis $1\frac{3}{4}$ fere in ejus longitudine; oculis diametro 3 circ. in longitudine capitis, diametro $1\frac{1}{3}$ circ. distantibus, diametro $1\frac{1}{3}$ circ. in capitis parte postoculari; linea rostro-dorsali rostro truncatiuscula, supra oculos concava, nucha valde convexa; linea interoculari convexiuscula; naribus ante pupillae partem superiorem perforatis posterioribus anterioribus majoribus valvula claudendis; rostro obtuso truncato, apice ante oculi partem inferiorem sito, oculo breviore, non ante os prominente, antice verruculoso; osse praeorbitali subpentagono apice sursum spectante angulis antero-inferiore et posteriore rotundatis; osse suborbitali 2° quadrangulari duplo circ. longiore quam alto; osse suborbitali 3° osse suborbitali 2° multo latiore minus duplo longiore quam alto mar-

gine inferiore valde convexo; maxilla superiore vix ante maxillam inferiorem prominente, mediocriter oblique antrorsum protractili, ante oculum desinente, 4 circ. in longitudine capitis; maxilla inferiore cochleariformi symphysi tuberculo nullo; rictu parvo obliquo; cirro supramaxillari rudimentario vix conspicuo; labiis mediocribus; sulco infralabiali symphysin attingente; operculo laevi multo minus duplo altiore quam lato, margine inferiore convexo; dentibus pharyngealibus uniseriatis 5/5 compressis leviter uncinatis margine interno pluricrenulatis; osse scapulari obtuse rotundato; dorso elevato angulato; cauda parte libera paulo longiore quam postice alta; squamis 35 vel 36 in serie longitudinali, 13 in serie transversa spinam dorsalem inter et pinnam ventralem quarum 6 ($5\frac{1}{2}$) supra lineam lateralem, 15 in serie longitudinali occiput inter et pinnam dorsalem; linea laterali vix curvata singulis squamis tubulo simplice notata; ano medio pinnas ventrales inter et analem perforato; pinna dorsali basi caudalis triplo magis quam apici rostri approximata radio postico radiis analibus subposticis oppositis, spinis medio circ apicem rostri inter et basin caudalis insertis, basi $2\frac{1}{2}$ in longitudine corporis absque pinna caudali, plus duplo longiore quam alta, corpore triplo circ. humiliore, antice quam postice multo minus duplo altiore, obtusa, convexa, spinis anteriore rudimentaria, 2ª et 3ª membrana gracili intermedia, 2ª gracili spina 3ª non multo breviore, 3ª valida ossea capite absque rostro non multo breviore; pinnis pectoralibus acutis capite absque rostro non vel vix brevioribus ventrales non attingentibus; ventralibus paulo ante dorsalem insertis, acutiusculis, pectoralibus non brevioribus, analem non attingentibus; anali sub medio pinnae dorsalis incipiente, capite longiore, dorsali humiliore, duplo circ. longiore quam antice alta, acutangula, vix emarginata, spina 1ª rudimentaria occulta, spina 2ª gracili spina 3ª non multo breviore, spina 3ª ossea valida spina dorsi 3ª paulo breviore; caudali (mutilata); colore corpore superne viridescente, inferne argenteo; iride flavescente; pinnis flavescentibus vel roseohyalinis, imparibus plus minusve fusco arenatis, anali arenam fuscam inter maculis dilutioribus longitudinaliter biseriatis, margine inferiore alba, vitta intramarginali fusca profundiore.

B. 3. D. 3/17 vel 3/18. P. 1/11. V. 2/7. A. 3/14 vel 3/15. C. 1/17/1 et lat. brev.

Hab. Shangai.

Longitudo speciminis unici absque pinna caudali (?).

Rem. Cette espèce est voisine, par la formule de l'écaillure et de la nageoire dorsale, de l'Acanthorhodeus macropterus Blkr, mais le dernier est bien distinct par le profil rostro-nuchal qui n'est point concave, par le museau non tronqué,

par la forme moins raccourcie du tronc, par la tête relativement plus petite, par deux rayons de moins à l'anale, et deux de plus aux pectorales, etc.

Le taenianalis est remarquable par la membrane entre la 2e et 3e épines dorsales, qui, bien que peu large, permet la divergence des épines.

Salmo (*Salmo*) *leptosoma.* — Tab. 2, fig. 3.

Salm. (Salm.) Corpore subelongato compresso, altitudine 5 circ. in ejus longitudine absque, $5\frac{5}{6}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis $2\frac{1}{4}$ circ. in ejus altitudine; capite compresso $4\frac{1}{4}$ circ. in longitudine corporis absque, 5 et paulo in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{2}{3}$ circ., latitudine capitis $2\frac{3}{5}$ circ. in ejus longitudine; oculis diametro $4\frac{2}{5}$ circ. in capitis parte postoculari, diametro 1' circ. distantibus; carina rostro-occipitali conspicua; linea rostro-dorsali nucha et rostro convexa fronte et vertice rectiuscula; linea mandibulo-ventrali rectiuscula; linea interoculari convexa; naribus ante pupillam perforatis subaeguimagnis; rostro oculo non longiore apice non emarginato ante oculi partem inferiorem sito convexo obtusiusculo; maxillis aequilongis non hamatis, superiore sub oculi margine posteriore desinente, 2 et paulo in longitudine capitis; osse supramaxillari quadruplo circ. longiore quam lato postice oblique ovatim rotundato; dentibus mediocribus, intermaxillaribus utroque latere 4 vel 5 postrorsum longitudine paulo accrescentibus, supramaxillaribus posterioribus quam anterioribus majoribus mediis quam ceteris brevioribus, mandibularibus inaequilongis anterioribus quam ceteris majoribus et magis distantibus; vomere capite brevissimo latiore quam longo bidentato, corpore dentibus irregulariter subbiseriatis; dentibus palatinis postrorsum longitudine vix decrescentibus, utroque latere 15 circ.; dentibus lingualibus utroque latere 3 distantibus subaequimagnis curvatis; dentibus basi linguae nullis; dentibus pharyngealibus pauciseriatis conicis acutis curvatis ossibus suborbitalibus posterrioribus oculi diametro paulo gracilioribus; praeoperculo irregulariter sublunariter rotundato, limbo inferiore conspicuo nullo; operculo latitudine maxima $1\frac{2}{3}$ circ. in ejus altitudine, angulo posteriore angulo suboperculi antero-inferiori quam angulo operculi superiore propiore; suboperculo vix post operculum prominente triplo circ. longiore quam alto; squamis caudalibus squamis medio lateribus paulo majoribus; squamis angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 135 circ. infra lineam lateralem in series 120 circ. transversas dispositis; squamis serie transversa 40 circ. pinnam dorsalem inter et ventrales, 20 circ. initium pinnae dorsalis inter et lineam lateralem, 10 circ. dor-

sum caudae mox post adiposam inter et lineam lateralem; squamis 65 circ. in serie longitudine occiput inter et pinnam dorsalem; linea laterali recta singulis squamis tubulo simplice notata; cauda parte libera duplo fere longiore quam postice alta; pinna dorsali radiosa medio oculi marginem anteriorem inter et basin pinnae caudalis posita, radio 1° apici rostri quam basi caudalis, adiposae autem quam apice rostri propiore, paulo altiore quam longa, capitis parte postoculari paulo breviore, acuta, vix emarginata; dorsali adiposa post analem inserta, plus capitis longitudine a dorsali radiosa remota multo altiore quam basi longa; pectoralibus et ventralibus acutis, pectoralibus capitis parte postoculari paulo longioribus apice totae pinnae longitudinis a ventralibus remotis; ventralibus mox post medium dorsalis radiosae insertis capitis parte postoculari non longioribus, apice anali quam earum basi propioribus; anali dorsali radiosa paulo breviore sed non humiliore, altiore quam longa, acuta, emarginata; caudali capite absque rostro non breviore, radiis mediis quam angularibus duplo fere brevioribus, extensa latiore quam longa leviter emarginata angulis acuta; colore superne chalybeo-viridi vel fuscescente-viridi, inferne argenteo maculis nullis; iride flavescente-aurea; pinnis dilute violascentibus fusco plus-minusve dense arenatis; dorsali radiosa membrana maculis aliquot sparsis profundioribus.
B. 11. D. 3/10 vel 3/11. P. 1/12. V. 2/8. A. 3/8 vel 3/9. C. 1/17/1 et lat. brev.
Hab. China.
Longitudo speciminis descripti 345‴.

Rem. Je ne retrouve pas cette espèce dans les auteurs. Elle appartient au groupe à 120 à 140 rangées transversales d'écailles, à une vingtaine de rangées d'écailles entre la première dorsale et la ligne latérale et à 10 à 12 de ces rangées entre la base postérieure et la ligne latérale. Elle se fait remarquer par la forme très-comprimée du tronc et de la tête, par la forme convexe du museau et par son profil inférieur presque droit, et sa diagnose est facilitée par les proportions de la tête, de la mâchoire supérieure, de l'opercule et du sousopercule, des pectorales, de la dorsale et de l'anale, etc.

Salmo (*Salmo*) *pomatops* Blkr. — Tab. 2 fig 2.

Salm. (Salm.) corpore subelongato compresso, altitudine 4⅓ circ. in ejus longitudine absque, 5⅓ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis 2 et paulo in ejus altitudine; capite compresso, 4 et paulo in longitudine corporis absque, 5 et paulo in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis 1⅓ circ., latitudine capitis 2⅓ ad 2¼ in ejus longitudine; oculis diametro

$3\frac{3}{4}$ in longitudine capitis, 2 circ. in capitis parte postoculari, diametro 1 fere distantibus; carina rostro-occipitali nulla; linea rostro-dorsali nucha, fronte et rostro convexa vertice tantum rectiuscula; linea mandibulo-ventrali convexa; linea interoculari rectiuscula; naribus ante pupillam perforatis subaequimagnis; rostro oculo breviore apice non emarginato ante oculi partem inferiorem sito, convexo obtusiusculo; maxillis non hamatis, superiore inferiore paulo longiore, ante oculi marginem posteriorem desinente, $2\frac{2}{5}$ circ. in longitudine capitis; osse supramaxillari minus triplo longiore quam lato, postice obtuse rotundato; dentibus mediocribus, intermaxillaribus utroque latere 6 vel 7 postrorsum longitudine paulo accrescentibus, supramaxillaribus posterioribus quam anterioribus paulo majoribus mediis quam ceteris brevioribus, mandibularibus inaequilongis anterioribus quam ceteris majoribus et magis distantibus; vomere capite brevissimo latiore quam longo, corpore dentibus irregulariter subbiseriatis; dentibus palatinis utroque latere plus quam 20 anterioribus subbiseriatis; dentibus lingualibus utroque latere 3 distantibus subaequimagnis curvatis; dentibus basi linguae nullis; ossibus suborbitalibus posterioribus oculi diametro duplo circ. gracilioribus; praeoperculo regulariter obtuse rotundato, limbo inferiore conspicuo; operculo latitudine maxima 1 et paulo tantum in ejus altitudine, angulo posteriore ab angulo ejus superiore et ab angulo suboperculi antero-inferiore aequidistante; suboperculo post operculum prominente triplo fere longiore quam alto; squamis caudalibus squamis mediis lateribus vix majoribus; squamis angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 140 infra lineam lateralem in series 130 circ. transversas dispositis; squamis serie transversa 43 circ. pinnam dorsalem inter et ventrales, 22 circ. initium pinnae dorsalis inter lineam lateralem, 10 vel 11 dorsum caudae mox post adiposam inter et lineam lateralem; squamis 70 circ. in serie longitudinali occiput inter et pinnam dorsalem; linea laterali vix curvata singulis squamis tubulo simplice notata; cauda parte libera multo minus duplo longiore quam postice alta; pinna dorsali radiosa medio oculi marginem anteriorem inter et basin pinnae caudalis posita, radio 1° apici rostri quam basi caudalis adiposae quam apici rostri propiore, paulo altiore quam longa, capitis parte postoculari non breviore, acuta, leviter emarginata; dorsali adiposa post analem inserta multo altiore quam basi longa; pectoralibus acutis capite absque rostro paulo longioribus apice multo minus totius pinnae longitudinis a ventralibus remoto; ventralibus acutiuscule rotundatis sub radiis dorsalibus posticis insertis capitis parte postoculari vix longioribus apice anali quam earum basi duplo circ. propioribus; anali dorsali radiosa breviore et humiliore, altiore quam longa, acuta, emarginata; caudali capite absque rostro non breviore, sat profunde emarginata lobis acutis, radiis mediis

quam radiis angularibus duplo circ. brevioribus; colore corpore superne chalybeo viridi inferne argenteo; iride flavescente, margine orbitali fusca; operculo angulum posteriorem versus macula rotunda fusca; trunco maculis conspicuis nullis; pinnis flavescentibus vel aurantiacis, imparibus fusco plus minusve arenatis, dorsali radiosa dimidio inferiore maculis parcis fuscis biseriatis, caudali postice leviter fusco emarginata.
B. 11 vel 12. D. 3/9 vel 3/10. P. 1/13. V. 2/8. A. 3/8 vel 3/9. C. 1/17/1 et lat. brev.
Hab. China?
Longitudo speciminis descripti 160‴.

Rem. Cette espèce aussi me paraît inédite. Elle appartient au même groupe que la précédente, présentant les mêmes formes et environ la même formule des écailles, qui cependant sont un peu plus nombreuses. L'individu décrit ne mesurant en longueur que presque la moitié de celle de celui du leptosoma, plusieurs différences peut-être ne tiennent qu'à l'âge. Il est à noter cependant que dans le pomatops le corps est plus trapu et moins comprimé, les yeux plus grands, la mâchoire supérieure plus courte, le maxillaire plus large, les postorbitaires moins larges, l'opercule plus large, les ventrales implantées plus en arrière sous la dorsale, la caudale beaucoup plus échancrée, etc. J'y trouve encore un rayon de moins à la dorsale et un de plus aux pectorales, et une tache ronde et brune vers l'angle postérieur de l'opercule, tache qui pourrait bien être caractéristique pour l'espèce. Je trouve cette tache sur une figure (Notes on Some Fig. of Japanese Fishes. Jap. exped. tab. 10 fig. 3) publiée par M. Brevoort sous le nom de Salmo leucomaenis, mais qui doit être fort différent du leucomaenis de Pallas, au-moins si le poisson rapporté par M. Günther à cette espèce (Cat. Fish. VI p. 145 fig. capit.) est en effet identique avec l'espèce de Pallas. Je trouve cependant tant de différences entre la figure publiée par Brevoort et l'individu décrit ci-dessus, que si au-moins la figure est un peu exacte, elle ne peut pas représenter l'espèce actuelle. J'y trouve le corps plus allongé, la tête plus petite, la mâchoire supérieure plus longue, les yeux plus petits, la première dorsale implantée plus en avant et convexe, les ventrales insérées sous le milieu de la première dorsale, etc.

Le poisson faisait partie d'un envoi de poissons de Chine, mais il n'y est pas indiqué positivement, que la Chine est sa véritable patrie.

La Haye, Nov.-Déc. 1877.

ÉNUMÉRATION

DES ESPÈCES DE POISSONS ACTUELLEMENT

CONNUES DU JAPON

ET DESCRIPTION DE TROIS ESPÈCES INÉDITES.

PAR

P. BLEEKER.

L'énumération suivante est le résultat d'un recensement nouveau des espèces enregistrées jusqu'ici comme appartenant à la faune ichthyologique du Japon.

Dans la liste, publiée en 1860 *, le nombre des espèces de poissons du Japon fut porté à 461, ou, abstraction faite de celles reconnues depuis n'être que des doubles emplois, à 447. Depuis cette époque plusieurs auteurs, Kaup, Kner et MM. Gill, Brevoort, Steindachner et Günther, ont fait connaître beaucoup d'autres espèces du Japon. Moi-même aussi j'ai pu y ajouter quelques unes, et tout récemment encore je trouvai quelques espèces nouvelles pour la même faune parmi les poissons, dont l'Administration du Musée Zoologique de Hambourg a bien voulu me confier la détermination †. Par toutes ces recherches des derniers temps, le chiffre total des espèces actuellement connues de l'empire du Japon

* Zesde bijdrage tot de kennis der ichthyologische fauna van Japan in Act. Soc. Scient. Ind. Neerl. VII.

† Les espèces japonaises trouvées dans l'envoi du dit Muséum sont au nombre de 13, dont six sont nouvelles pour la faune du Japon et trois inédites. La description et la figure de ces trois espèces font partie de cet article.

monte à presque 550. J'aurais pu augmenter encore ce nombre en y comptant plusieurs espèces, figurées dans l'ouvrage japonais de Kurimoto * intitulé Kwoo-wa gio-bu (Description des poissons de l'illustre Japon) dont je ne connais que la première partie qui traite des poissons d'eau douce, mais bien que j'aie pu y reconnaître plus de vingt espèces, ce qui indique que leurs figures méritent quelque confiance, j'y trouve une trentaine d'autres, fort imparfaitement représentées dont la détermination rigoureuse n'est pas possible et que par conséquent il serait hasardé d'introduire dans la science.

La liste suivante énumère les espèces sous les dénominations que j'ai cru adopter comme conformes à l'état actuel de la science, et je n'y ai ajouté que les synonymes sous lesquels elles figurent dans les ouvrages et les mémoires publiés sur le même sujet. Des espèces sans indication d'habitat la localité japonaise n'a pas été notée par les auteurs.

La connaissance de la distribution des espèces dans l'empire Japonais laisse encore beaucoup à désirer, et d'un grand nombre on ne connaît ni la localité précise ni même l'île. On sait cependant que les côtes de la partie septentrionale de Nippon et celles de Jezo nourrissent beaucoup d'espèces qui n'habitent pas les latitudes méridionales de l'empire et qui appartiennent à des genres et même à des familles qui ne se retrouvent pas sur les côtes de Sikok et de Kiusiu, dont la faune ichthyologique marine porte encore une empreinte tropique fort prononcée. Les parties méridionales de l'empire sont beaucoup mieux connues que ses latitudes boréales, et bien qu'il n'y aurait pas lieu de s'étonner si les recherches ultérieures aux différentes îles tripleraient le nombre des espèces connues, il est probable qu'on trouvera les formes nouvelles les plus nombreuses et les plus remarquables à Nippon et à Jezo.

---

* Cité dans la „Neuvième notice sur la faune ichthyologique du Japon, Versl. Kon. Ak. Wet. Afd. Natuurk., 2de Rks, III, p. 237—252." Je dois à M. le professeur J. Hoffmann à Leide, une traduction de cet ouvrage. Les descriptions n'ont aucune valeur réelle et ne peuvent pas aider à faire reconnaître les espèces figurées, mais elles en indiquent les noms japonais, les localités et les usages. J'apprends par cette traduction que l'espèce d'Ophiocephalus, cité dans la notice susdite, n'habite pas les îles du Japon et que Kurimoto n'en avait vu que quelques individus rapportés vivants de Chine.

SPECIES PISCIUM JAPONICAE HUCUSQUE COGNITAE.

Carcharioidei.

1. Cynocephalus (Prionace) japonicus Blkr = Carcharias (Prionodon) japonicus Schl.
2. „ („) melanopterus Blkr = Carcharias melanopterus QG.— Hab. Kiusiu (Nagasaki).
3. Triakis scyllium MH. — Hab. Sikok (Simoda).
4. Mustelus manazo Blkr = Mustelus vulgaris Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
5. Galeus japonicus MH.
6. Cestracion malleus Gill. = Zygaena malleus Risso. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Scyllioidei.

7. Scyllium Bürgeri MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
8. Crossorhinus barbatus MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Lamnoidei.

9. Oxyrhina glauca MH.
10. Isurus cornubicus Gr. = Lamna cornubica Flem.

Heterodontoidei.

11. Heterodontus zebra Gr. = Cestracion Philippi MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).

Notidanoidei.

12. Heptanchus indicus MH.

Spinacoidei.

13. Spinax acanthias Flem. = Acanthias vulgaris Risso. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
14. Centrophorus squamulosus Günth. — Hab. Inosima.
15. „ foliaceus Günth. — Hab. Inosima.

Squatinoidei.

16. Rhina japonica Blkr = Squatina japonica Blkr = Squatina vulgaris Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Pristiophoroidei.

17. Pristiophorus serratus MH. = Pristiophorus cirratus MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Rhinobatidoidei.

18. Rhynchobatus djeddensis Cant. = Rhynchobatus laevis MH.
19. Rhinobatus (Syrrhina) annulatus MH. = Rhinobatus (Syrrhina) polyophthalmus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
20. „ (Rhinobatus) Schlegelii MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Torpedinoidei.

21. Narcine timlei MH.
22. Astrape japonica Schl. = Torpedo (Astrape) japonica Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Rajoidei.

23. Dasybatis kenojei Blkr = Raja kenojei Bürg. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
24. „ Meerdervoorti Blkr = Raja Meerdervoortii Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
25. „ isotrachys Blkr = Raja isotrachys Günth. — Hab. Japonia meridionalis.

Trygonoidei.

26. Leiobatus akajei Blkr = Trygon akajei MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
27. „ Kukli Blkr = Trygon Kukli MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
28. „ Zugei Blkr = Trygon zugei MH. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
29. „ nuda Blkr = Trygon nuda Gunth. — Hab. Japonia.
30. Urolophus cruciatus Gunth = Urolophus aurantiacus MH.
31. Platyrhina sinensis MH.
32. Pteroplatea japonica Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Myliobatidoidei.

33. Myliobatis tobijei Blkr = Myliobatis aquila Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
34. Dicerobatis japonica Blkr = Cephaloptera japonica MH.

Chimaeroidei.

35. Chimaera monstrosa L. — Hab. Goto, Jezo.

Scaroidei.

36. Pseudoscarus ovifrons Blkr = Scarus ovifrons Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
37. Callyodon japonicus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Labroidei.

38. Cirrhilabrus Temminckii Schl. = Cirrhilabrus Schl.

39. Duymaeria japonica Blkr. = Crenilabrus flagellifer Schl.
40. „ spilogaster Blkr = Crenilabrus spilogaster Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
41. Novacula dea Blkr = Xyrichthys dea Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
42. Cheilio inermis Rich? = Cheilio ramosus Jen. — Hab. Lew-Chew.
43. Pseudolabrus rubiginosus Blkr = Labrus rubiginosus Schl.
44. Hemigymnus fasciatus Günth. = Tautoga fasciata Cv. — Hab. Japonia?
45. Gompherus fuscus Val. — Hab. Lew-Chew.
46. Julis cupido Schl.
47. „ quadricolor Less. — Hab. Sikok (Simoda).
48. „ lunaris Val. = Julis lutescens Brev. — Hab. Napha, Lew-Chew.
49. Platyglossus (Parajulis) poecilopterus Blkr = Julis poecilopterus Schl. = Halichoeres poecilopterus Blkr — Hab. Kiusiu (Simabara).
50. Platyglossus (Parajulis) pyrrhogramma Blkr = Julis pyrrhogramma Schl. = Halichoeres pyrrhogramma Blkr.
51. Harpe oxycephalus Blkr = Cossyphus oxycephalus Blkr.
52. Semicossyphus reticulatus Schl. = Cossyphus reticulatus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
53. Choerops japonicus Blkr = Cossyphus japonicus Blkr = Labrus japonicus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
54. Choerops anchorago Pet. = Choerops macrodon Blkr.

Percoidei.

55. Priacanthus benmebari Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
56. „ dubius Schl.
57. „ japonicus Schl.
58. Pseudopriacanthus niphonius Blkr = Priacanthus niphonius Cv. — Hab Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
59. Caprodon Schlegeli Blkr = Caprodon Schl.
60. Glaucosoma Bürgeri Rich.
61. Siniperca chuatsi Gill = Plectroperca Berendti Pet.
62. Aulacocephalus Temmincki Blkr = Aulacocephalus Schl.
63. Centropristes hirundinaceus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
64. Epinephelus aka-ava Blkr. = Serranus aka-ava Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Osaka).
65. „ ura Blkr = Serranus ura Cv? = Serranus ara Schl.
66. „ areolatus Blkr = Serranus areolatus japonicus Schl.
67. „ awoara Blkr = Serranus awoara Schl. — Hab. Japonia; Lew Chew.

68. Epinephelus dermopterus Blkr = Serranus dermopterus Schl.
69. " diacanthus Blkr = Serranus diacanthus Cv = Serranus trimaculatus Blkr (nec Cv) — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
70. " epistictus Blkr = Serranus epistictus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
71. " ? Kawamebari Blkr = Serranus Kawamebari Schl.
72. " fasciatus Blkr = Serranus marginalis Cv. — Hab. Sikok (Simoda).
73. " latifasciatus Blkr = Serranus latifasciatus Schl.
74. " nebulosus Blkr = Serranus moara Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
75. " poecilonotus Blkr = Serranus poecilonotus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
76. " semipunctatus Blkr = Serranus semipunctatus Cv = Perca septemfasciata Thunb.?
77. " susuki Blkr = Plectropoma susuki Cv = Serranus octocinctus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Susuki).
78. " fasciato-maculatus Pet. = Serranus trimaculatus Cv = Epinephelus japonicus Krus. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
79. " triremenara Blkr = Serranus triremenara Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Bonin ins. Prst Lloyd).
80. " urodelus Blkr = Serranus urodelus Cv. — Hab. Lew-Chew.
81. Paracanthistius leopardinus Blkr = Plectropoma leopardinum Cv.
82. Diploprion bifasciatum K. V. H. — Hab. Kiusiu (Nagasaki, Simabara).
83. Amia lineata Blkr = Apogon lineatus Schl.
84. " nigripinnis Blkr = Apogon nigripinnis Schl.
85. " fasciata Gill. = Apogon novemfasciatus Cv.
86. " Schlegeli Blkr = Apogon novemfasciatus Schl. (nec Cv.)
87. " semilineata Blkr = Apogon semilineatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
88. " quadrifasciata Blkr = Apogon quadrifasciatus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
89. " carinata Blkr = Apogon carinatus Schl. = Apogonichthys carinatus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
90. " glaga Blkr = Apogon et Apogonichthys glaga Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
91. Acropoma apogonoides Blkr = Acropoma Schl.
92. Lateolabrax japonicus Blkr = Labrax japonicus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
93. Niphon spinosus Cv. — Hab. Jesso (Jeso).

94. Therapon (Datnia) oxyrhynchus Blkr = Therapon oxyrhynchus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki; Sikok (Simoda).
95. „ (Pelates) quadrilineatus Blkr = Pelates quadrilineatus Cv
96. Histiopterus acutirostris Schl.
97. „ typus Schl.
98. Hapalogenys maculatus Rich. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
99. „ nigripinnis Rich. = Pogonias nigripinnis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
100. Plectorhynchus cinctus Blkr = Diagramma cinctum Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
101. „ pictus Blkr = Diagramma punctatum Cv = Diagramma poecilopterus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
102. „ pertusus Blkr = Perca pertusa Thunb. = Diagramma Thunbergii Cv.
103. Parapristipoma trilineatum Blkr = Perca trilineata Thumb. = Pristipoma japonicum Cv = Diagramma japonicum Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
104. Etelis oculatus Blkr = Serranus oculatus Cv = Elastoma oculatum Swns. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
105. Aprion Sieboldi Blkr = Chaetopterus Sieboldi Blkr.
106. Lutjanus christat Blkr = Mesoprion annularis Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
107. „ bengalensis Blkr = Diacope octolineata Cv Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
108. „ malabaricus Blkr = Diacope Calveti Cv. Schl. — Hab. Japonica.
109. „ sparus Blkr = Mesoprion sparus Schl.
110. „ Russelli Blkr = Mesoprion Russelli Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
111. „ vitta Blkr = Diacope vitta Schl. = Mesoprion Ophuijsenii Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
112. Banjos typus Blkr = Anoplus banjos Rich. = Anoplus Schl.
113. Synagris hypselosoma Blkr = Dentex hypselosoma Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
114. „ Thunbergii Blkr = Dentex Thunbergii Cv.
115. Gymnocranius griseus Blkr = Dentex griseus Schl. — Hab. Kiusiu; (Nagasaki).
116. Dentex sinensis Blkr = Dentex setigerus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
117. Latilus argentatus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

118. Scolopsis kurita CV.
119. „ inermis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
120. Lethrinus choerorhynchus CV. — Hab. Japonia?
121. „ Güntheri Blkr — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
122. „ haematopterus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Lew-Chew.
123. „ nematacanthus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
124. Sparus aries Blkr = Chrysophrys aries Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki.)
125. „ cardinalis Blkr = Chrysophrys cardinalis CV. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
126. „ major Blkr = Chrysophrys major Schl.
127. „ Schlegeli Blkr = Chrysophris Schlegeli Blkr ex parte. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
128. „ datnia Blkr = Chrysophris Schlegeli Blkr. ex parte. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
129. „ tumifrons Blkr = Chrysophrys tumifrons Schl.
130. Emmelichthys Schlegelii Rich = Erythrichthys Schl.
131. Hoplegnathus fasciatus Rich. = Scarodon fasciatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda); Nippon (Kaminoseki).
132. „ punctatus Rich. = Karodon punctatus Schl.
133. Diapterus equula Blkr = Gerres equula Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
134. „ japonicus Blkr = Gerres japonicus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Embiotocoidei.

135. Ditrema Temmincki Blkr = Ditrema Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Jesso (Hakodadi).

Chaetodontoïdei.

136. Pimelepterus cinerascens Day = Pimelepterus indicus K. V. H.
137. Girella melanichthys Blkr = Melanichthys Schl. = Melanichthys crenidens Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
138. Microcanthus strigatus Swns. = Chaetodon strigatus Laupd. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Kaminoseki).
139. Atypichthys strigatus Günth. = Helotosoma servus Kp.
140. Caeriosoma Sieboldi Kp. = Caeriosoma Kp.
141. Taurichthys macrolepidotus Blkr = Heniochus macrolepidotus CV. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Lew-chew.
142. Tetragonopterus (Tetragonopterus) aureus Blkr = Chaetodon aureus Schl. (nec Bl.) — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

143. Tetragonoptrus (Linophora) auriga Blkr = Chaetodon nesogallicus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
144. „ (Rabdophorus) modestus Blkr = Chaetodon modestus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Kaminoseki).
145. Chaetodontoplus septentrionalis Blkr = Holacanthus septentrionalis Schl. — Hab. Kiusius (Nagasaki).
146. Platax teira Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
147. „ vespertilio Cv.

Hypsinotoidei.

148. Hypsinotus benhatatate Blkr = Hypsinotus Schl. — Hab. Kiusiu (Omura).

Pempheridoidei.

149. Pempheris moluca Cv.
150. Parapriacanthus Ransonneti Stend. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Cirrhiteoidei.

151. Cirrhitichthys aureus Blkr = Cirrhites aureus Schl.— Hab. Kiusiu (Nagasaki).
152. Cheilodactylus (Goniistius) zonatus Blkr = Cheilodactylus zonatus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
153. „ („) quadricornis Blkr = Cheilodactylus quadricornis Günth.

Sciaenoidei.

154. Pseudosciaena? japonica Schl. = Sciaena japonica Schl.
155. „ Schlegeli Blkr = Corvina sina Schl. (nec Cv.) — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
156. „ cuja Blkr = Corvina cuja Cv.
157. „ (Bairdiella) acanthodes Blkr. Mus. Hamburg.

Sillaginoidei.

158. Sillago japonica Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Scombropiformes.

159. Scombrops cheilodipteroides Blkr = Scombrops Schl.—Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Mulloidei.

160. Upeneus dubius Rich. = Mullus dubius Schl.
161. „ bensasi Rich. = Mullus bensasi Schl. = Upeneoides bensasi Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

162. Upeneus subvittatus Blkr = Mullus subvittatus Schl = Upeneoides subvittatus Blkr.
163. „ sulphureus Cv. = Upeneoides sulphureus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
164. „ vittatus Cv. = Upeneoides vittatus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
165. Mulloides japonicus Blkr = Upeneus japonicus Cv.
166. „ pinnivittatus Steind.
167. Upeneichthys? chrysopleuron Blkr Mullus chrysopleuron Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
168. Parupeneus pleurospilus Blkr = Upeneus pleurospilos Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
169. „ spilurus Blkr = Upeneus spilurus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
170. „ indicus Blkr = Upeneus Russelli Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Pseudochromidoidei.

171. Cichlops cyclophthalmus M.Tr. = Cichlops japonicus Gill.

Pomacentroidei.

172. Prochilus polymnus Blkr = Amphiprion japonicus Schl. = Amphiprion chrysargyrus Rich. = Amphiprion chrysopterus Cv.
173. „ frenatus Blkr = Amphiprion frenatus Brev. = Prochilus macrostoma Blkr?? — Hab. Lew-chew.
174. Pomacentrus (Pseudopomacentrus) trilineatus Blkr? = Pomacentrus dorsalis Gill.
175. Glyphidodon (Amblyglyphidodon) trifasciatus Blkr = Glyphidodon smaragdinus Brev. — Hab. Lew-chew.
176. „ (Glyphidodon) coelestinus Cv.
177. Paraglyphidodon melas Blkr? = Glyphisodon violaceus Brev. — Hab. Lew-chew.
178. Chromis notatus Blkr = Heliases notatus Schl.

Berycoidei.

179. Holocentrum rubrum Rüpp = Holocentrum albo-rubrum Lac.
180. „ spinosissimum Schl. — Hab. Japonia; Lew-Chew.
181. Myripristis japonicus Cv. = Ostichthys aureus Lacep. d. ap. Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Monocentrioidei.

182 Monocentris japonicus Bl. Schn. = Gasterosteus japonicus Houtt. =

Scinaena japonica Thunb. = Monocentris carinata Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda); Nippon (Kaminoseki).

Cottoidei.

183. Cottus pollux Günth. — Hab. Japonia (Otarranai).
184. Centridermichthys japonicus Steind. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
185. " intermedius Gir. = Cottus intermedius Schl. — Hab. Jesso (Jeso).
186. " uncinatus Ger. = Cottus uncinatus Schl.
187. Hemilepidotus Tilesii Cv. = Cottus hemilepidotus Tiles. — Hab. Kuril., Sagalien.
188. Pseudoblennius anahaze Blkr — Pseudoblennius pseudoclinus Schl. = Pseudoblennius percoides Günth. — Hab. Kiusiu (Omura).

Chiroidei.

189. Agrammus Schlegelii Günth. = Labrax agrammus Schl. = Chirus agrammus Rich.
190. Chirus hexagrammus Cv. = Labrax hexagrammus Pall. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
191. Grammatopleurus lagocephalus Gill. = Chirus lagocephalus Pall. — Hab. Kuril.
192. Octogrammus Pallasi Blkr = Labrus octogrammus Pall. = Chirus octogrammus Günth. — Hab. Kuril.
193. Labracoglossa argenteiventris Peters (an hujus loci?) — Hab. Yokohama.

Scorpaenoidei.

194. Scorpaena (Parascorpaena?) miostoma = Scorpaena miostoma Günth. — Hab. Yokohama.
195. Sebastichthys marmoratus Blkr = Sebastes marmoratus et albofasciatus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
196. " inermis Blkr = Sebastes inermis Schl. — Hab. Jesso (Hakodadi); Nippon (Jedo).
197. " pachycephalus Blkr = Sebastes pachycephalus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
198. " ventricosus Blkr = Sebastes ventricosus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
199. " oblongus Blkr = Sebastes oblongus Günth. — Hab. maria interiora.
200. Sebastichthys macrochir Blkr = Sebastes macrochir Günth. — Hab. maria interiora.

201. Scorpaenopsis cirrhosus Blkr = Scorpaena cirrhosa Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
202. „ ? neglectus Blkr = Scorpaena neglecta Schl.
203. Pseudomonopterus (Pterois) lunulatus Blkr = Pterois lunulata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda); Nippon (Kaminoseki).
204. „ („) volitans Blkr = Pterois volitans Cv.
205. Apistus alatus Cv. = Pterichthys alatus Swns. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
206. Prosopodasys depressifrons Blkr = Apistus depressifrons Rich.
207. Amblyapistus taenianotus Blkr = Apistus taenianotus Cv.
208. Gymnapistus rubripinnis Gill. = Apistus rubripinnis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
209. Minaus pusillus Schl. = Aploactis pusillus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
210. Aploactis aspera Rich. = Aploactis Schl. = Synanceia (Aploactis) aspera Rich. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Synanceioidei.

211. Pelor aurantiacum Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), Omura.
212. „ japonicum Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
213. Synanchia erosa Swns. = Synanceia erosa Lacep. Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Haminoseki).

Platycephaloidei.

214. Platycephalus asper Cv.
215. „ fuscus Cv.
216. „ guttatus Cv. = Platycephalus crocodilus Voy. Krusenst. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
217. „ indicus Blkr = Platycephalus insidiator Blkr, Schn. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
218. „ japonicus Tiles. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
219. „ macrolepis Blkr. — Hab. Kiusiu („).
220. „ Meerdervoortii Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
221. „ punctatus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
222. „ rudis Günth. — Hab. Yokohama.
223. „ spinosus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
224. Bembras japonicus Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
225. Parabembras curtus Blkr = Bembras curtus Cv.

226. Bembrops caudimacula Stnd.
227. Hoplichthys pusillus Blkr = Hoplichthys Langsdorfii Cv. = Aspidophorus pusillus Langsd. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Trigloidei.

228. Trigla kumu Less. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
229. „ hemisticha Schl.
230. Lepidotrigla Bürgeri Günth. = Trigla Bürgeri Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
231. Lepidotrigla stonuchii Stnd.
232. Prionotus japonicus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
233. Corystion orientalis Blkr = Dactylopterus orientalis Schl. = Dactylopterus japonicus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
234. Peristedion orientale Schl. — Hab. Nippon (Jedo).

Aspidophoroidei.

235. Hippocephalus japonicus Swns. = Cottus japonicus Pall. — Hab. Japon, Kuril., Sagalien.
236. Brachyopsis rostratus Gill. = Agonus rostratus Tiles. — Hab. Japon., Kuril., Sagalien.
237. Agonus laevigatus Tiles. = Aspidophorus laevigatus Cv. — Hab. Japonia, Sagalien.

Syngnathoidei.

238. Hippocampus antiquorum Leach? = Hippocampus brevirostris Schl. = Hippocampus japonicus Kp.
239. „ longirostris Schl.
240. „ coronatus Schl. — Hab. Nippon (Jedo).
241. „ Mohnikei Blkr. — Hab. Nippon (Kaminoseki).
242. „ hystrix Kp.
243. Acentronura gracillima Kp. = Hippocampus gracilissimus Schl.
244. Gastrotokeus biaculeatus Heck.
245. Halicampus koilomatodon Blkr = Syngnathus Koilomatodon Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
246. Trachyrhamphus serratus Kp. = Syngnathus serratus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
247. „ intermedius Kp. = Syngnathus intermedius Günth. — Hab. Japonica?
248. Syngnathus Schlegeli Kp. = Syngnathus tenuirostris Schl. (nec Rathke).

Macrorhamphoidei.

249. Centriscus japonicus Günth.

Aulostomatoidei.

250. Aulostoma chinense Cv. = Fistularia chinensis Schl.

Fistularioidei.

251. Solenostomus serratus Gill. = Fistularia serrata = Fistularia immaculata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki; Nippon (Kaminoseki).

Gasterosteoidei.

252. Aulichthys japonicus Brev.
253. Gasterosteus obolarius Cv? = vide figur. japon. — Hab. Jezo; Jetsigo; Lac. Biwako; sec. Kurimoto.

Carangoidei.

254. Caranx trachurus Lac. = Selar japonicus Blkr = Caranx trachurus japonicus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
255. „ torvus Jen. = Selar torvus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
256. Decapterus maruadsi Blkr = Caranx maruadsi Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
257. „ muroadsi Blkr = Caranx muroadsi Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
258. Carangus carangus Cv. = Caranx mala Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
259. „ hippos Blkr? = Caranx hippos Günth ?= Caranx flavocoeruleus Schl.
260. Citula ciliaris Blkr = Blepharus indicus Cv. Schl. = Carangoides ciliaris Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
261. „ armata Rüpp. = Caranx ciliaris Cv. Schl. = Carangoides armatus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
262. „ equula Blkr = Caranx equula Schl. = Carangoides equula Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Serioloidei.

263. Seriola aureovittata Schl.
264. „ intermedia Schl.
265. „ quinqueradiata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
266. „ purpurascens Schl. = Seriola Dumerilii Russ. sec. Günth. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Scomberoidei.

267. Scomber auratus Houtt. Cv. (spec. dub.).

268. Scomber japonicus Houtt. Cv. (spec. dub.).
269. „ janesaba Blkr = Scomber pneumatophorus minor Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
270. „ saba Blkr = Scomber pneumatophorus major Schl, — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
271. „ scombrus (japonicus) Schl.
272. „ tapeinocephalus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
273. Auxis tapeinosoma Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
274. Pelamys thunninus Blkr = Thynnus thunnina Cv.
275. „ pelamys Blkr = Thynnus pelamys Cv.
276. „ japonicus Blkr = Thynnus orientalis Schl.
277. „ sibi Blkr = Thynnus sibi Schl.
278. „ macropterus Blkr = Thynnus macropterus Schl.
279. Sarda orientalis Blkr = Pelamys orientalis Schl.
280. Cybium chinense Cv.
281. „ niphonium Cv. — Hab. Nippon.
282. Acanthocybium sara Gill. = Cybium sara Benn. — Hab. Lew-Chew.
283. Lepidopus tenuis Günth. — Hab. Imosima.

Trichiuroidei.

284. Trichiurus japonicus Blkr = Trichiurus lepturus japonicus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Xiphioidei.

285. Histiophorus orientalis Schl. — Hab. Japonia austro-occidentalis.

Echeneoidei.

286. Leptecheneis naucrates Gill. — Echeneis naucrates L. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
287. Echeneis albescens Schl.
288. „ brachyptera Lowe = Echeneis pallida Schl.

Lichioidei.

289. Elacate nigra Günth. = Elacate mottah Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
290. Naucrates ductor Cv. = Naucrates indicus Cv.
291. Scomberoides Sancti Petri Blkr = Chorinemus Sancti Petri Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
292. „ tol Blkr = Chorinemus tol Cv. = Chorinemus orientalis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
293. Psenopsis anomalus Gill. = Trachinotus anomolus Schl. = Psenes anomalus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Psettoidei.

294. Apolectus niger Cv. = Stromateus niger Bl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
295. Stromateoides aculeatus Blkr = Stromateus punctatissimus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Coryphaenoidei.

296. Coryphaena hippurus L. = Coryphaena japonica Schl. — Hab. Japonia austro-occidentalis.

Veliferoidei.

297. Velifer hypselopterus Blkr = Velifer Schl.

Zeoidei.

298. Zeus japonicus Cv. = Zeus faber japonicus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
299. Zenopsis nebulosus Gill. = Zeus nebulosus Schl.

Equuloidei.

300. Leiognathus nuchalus Blkr = Equula nuchalis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
301. „ rivulatus Blkr = Equula rivulata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Lampridoidei.

302. Mene Anna-carolina Lac. = Mene maculata Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Teuthioidei.

303. Teuthis aurantiaca Blkr = Amphacanthus aurantiacus Schl. an var. spec. sequent.?
304. „ fuscescens Blkr = Centrogaster fuscescens Houtt. = Amphacanthus fuscescens Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
305. „ albopunctata Blkr = Amphacanthus albopunctatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Acanthuroidei.

306. Rhombotides fumosus Blkr = Etsgilus fumosus Brev. — Hab. Lew-Chew.
307. Naseus scalprum Blkr = Prionurus scalprum Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
308. „ unicornis Günth. = Naseus fronticornis Comm.

Triacanthoidei.

309. Triacanthodes anomalus Blkr = Triacanthus anomalus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
310. Triacanthus brevirostris Val. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Balisteoidei.

311. Balistes (Balistapus) conspicillum Blkr = Balistes conspicillum Cuv. — Hab. Goota.
312. „ („) undulatus Blkr = Balistes lineatus Bl.Schn.
313. „ (Balistes) capriscus Gm. L. — Hab. Japonia (Mus. Hamburg).
314. Monacanthus komuki Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Kaminoseki).
315. „ cirrhifer Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
316. „ japonicus Cuv. = Balistes japonicus Tiles.
317. Paramonacanthus Broekii Blkr = Monacanthus Broekii Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
318. „ oblongus Blkr = Monacanthus oblongus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
319. „ modestus Blkr = Monacanthus modestus Günth. — Hab. maria interiora.
320. „ trachyderma Blkr = Monacanthus trachyderma Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
321. Pseudaluteres nasicornis Blkr = Alutera nasicornis Schl.
322. Aluteres monoceros Cuv. = Alutarius Berardi Less. = Alutera cinerea Schl.

Polynematoidei.

323. Trichidion plebejus Blkr = Polynemus plebejus Bronss. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Sphyraenoidei.

324. Sphyraena japonica Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
325. „ jello Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
326. „ nigripinnis Schl.
327. „ obtusata Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Atherinoidei.

328. Atherina Bleekeri Günth. = Atherina japonica Blkr (nec Houtt). — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Mugiloidei.

329. Mugil haematocheilus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
330. „ japonicus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki, Simabara).

Cepoloidei.

331. Cepola Schlegeli Blkr = Cepola Krusensternii Schl. fig. nec descr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
332. „ ? marginata = Cepola marginata Cv.
333. „ ? limbata = Cepola limbata Cv.
334. Acanthocepola Krusensterni Blkr = Cepola Krusensternii Blkr (Schl. ex parte). — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
335. „ mesoprion Blkr = Cepola mesoprion Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Lophoteoidei.

336. Lophotes Capellei Schl.

Uranoscopoidei.

337. Uranoscopus asper Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
338. „ oligolepis Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
339. „ bicinctus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
340. Gnathagnus elongatus Gill = Uranoscopus elongatus Schl. = Ichthyscopus elongatus Blkr.
341. Ichthyscopus inermis Swns. = Uranoscopus inermis Cv.

Parapercioidei.

342. Parapercis pulchella Blkr = Percis pulchella Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
343. „ sexfasciata Blkr = Percis sexfasciata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).

Callionymoidei.

344. Callionymus altovelis Schl. — Hab. Kiusiu (Ohomura).
345. „ Huguenini Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
346. „ longecaudatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
347. „ lunatus Schl.
348. „ Reevesii Rich. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
349. „ Richardsonii Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
350. „ valencienneri Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
351. „ Variegatus Schl.
352. „ inframundus Gill spec.?

Gobioidei.

353. Odontobutis obscura Blkr = Eleotris obscura Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in fluviis.

354. Culius oxycephalus Blkr = Eleotris oxycephalus Schl. — Hab. Nippon (Oomi in lacu Biwako) sec. Kurimoto.
355. Gymnogobius macrognathus Gill = Gobius macrognathus Blkr. — Hab. Nippon (Jedo), in fluviis.
356. Glossogobius brunneus Gill = Gobius brunneus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in ostiis fluviorum.
357. „ olivaceus Blkr = Gobius olivaceus Schl. — Hab. Nippon (Jedo), in mari.
358. Ctenogobius gymnauchen Blkr = Gobius gymnauchen Blkr. — Hab. Nippon (Jedo), in fluviis.
359. Acentrogobius Pflaumi Blkr = Gobius Pflaumi Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in mari.
360. „ Yokohamae Blkr = Gobius Yokohamae Günth. — Hab. Yokohama.
361. Cryptocentrus Knutteli Blkr = Gobius Knutteli Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in mari.
362. „ ? castaneus Blkr = Gobius castaneus O'thangness. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
363. Acanthogobius flavimanus Gill = Gobius flavimanus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), Nippon (Jedo); in mari et ostiis fluviorum.
364. Synechogobius hasta Gill = Gobius hasta Schl.
365. Chaenogobius annularis Gill. — Hab. Jesso (sin. Hakodadi).
366. Rhinogobius similis Gill.
367. Pterogobius elapoides Blkr = Gobius elapoides Günth.
368. „ virgo Gill = Gobius virgo Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in mari.
369. Amblychaeturichthys hexanema Blkr = Chaeturichthys hexanema Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon orientalis.
370. Parachaeturichthys polynema Blkr = Chaeturichthys polynema Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); in mari.
371. Tridentiger obscurus Gill = Sicydium obscurum Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in fluviis.
372. Periophthalmodon modestus Blkr = Periophthalmus modestus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in aquis fluvio-marinis (et Jedo sec. Kurimoto).
373. Boleophthalmus pectinirostris Rich. = Boleophthalmus Boddaerti Schl. (nec Cv.). — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in aquis fluvio-marinis.
374. „ Boddaerti Cv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki), in aquis fluvio-marinis.

375. Odontamblyopus Lacepedii Blkr = Amblyopus Lacepedii Schl. — Hab. Kiusiu (Fizen, Omura).
376. Luciogobius guttatus Gill.

Blennioidei.

377. Petroskirtes japonicus Blkr. — Hab. Nippon (Jedo).
378. „ elegans Stnd.

Centroblennioidei.

379. Clinus polyactocephalus Brev. = Blennius polyactocephalus Pall. — Hab. Jezo (Hakodadi).
380. Eumesogrammus hexagrammus Gill = Stichaeus hexagrammus Schl. — Hab. Kiusiu (Simabara).
381. Centronotus crassispinis Gill = Gunnellus crassispina Schl.
382. „ nebulosus Gill = Gunnellus nebulosus Schl. — Hab. Kiusiu (Sin. Mogi).
383. „ subfrenatus Gill.
384. „ dolichogaster Gill = Blennius dolichogaster Pall. — Hab. Jezo (Hakodadi).
385. Dictyosoma Bürgeri v. d. Hoev. = Dictyosoma Schl. — Hab. Kiusiu (Simabara); Nippon (Kaminosaki).

Chironecteoidei.

386. Antennarius marmoratus Günth. = Chironectes marmoratus Cv. = Antennarius raninus Cant. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
387. „ tridens Blkr = Chironectes tridens Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Lophioidei.

388. Lophius setigerus Wahl. —Hab. Kiusiu(Nagasaki).

Maltheoidei.

389. Halieutea stellata Cuv. = Lophius stellatus Wahl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Kaminoseki).

Brotuloidei.

390. Brotula multibarbata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
391. Sirembo imberbis Blkr = Brotula imberbis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki, Omura); sec. Kurimoto etiam Nippon (Osaka).
392. „ grandis Günth. — Hab. Nippon (or. merid. Jedo).
393. Brotella armata Kp. = Brotula armata Schl.

Gadoidei.

394. Motella pacifica Schl.
395. Lotella phycis Blkr = Lota phycis Schl. = Lotella Schlegelii Kp.

Macruroidei.

396. Oxymacrurus japonicus Blkr = Macrourus japonicus Schl. = Oxycephas japonicus Kp. — Hab. Kiusiu (Omura, Simabara).
397. „ ? macrochir = Macrurus macrochir Günth. — Hab. Inosima.
398. „ ? parallelus = Macrurus parallelus Günth. — Hab. Inosima.
399. Macruroplus? leptolepis = Coryphaenoides leptolepis Günth.
400. Coryphaenoides longifilis Günth. — Hab. Nippon (or. mer. Jedo).
401. „ altipinnis Günth. — Hab. Nippon (or. mer. Jedo).
402. „ nasutus Günth. — Hab. Nippon (or. mer. Jedo).
403. „ asper Günth.
404. Lepidorynchus villosus = Coryphaenoides villosus Günth. — Hab. Nippon (or. mer. Jedo).

Atelcopoidei.

405. Ateleopus japonicus Blkr = Ateleopus Schl. — Hab. Kiusiu (Omura).

Halosauroidei.

406. Halosaurus affinis Günth. — Hab. Japon. meridion.

Pleuronecteoidei.

407. Chaenopsetta olivacea = Hippoglossus olivaceus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Osaka, Jedo).
408. „ Wolffi Blkr = Rhombus Wolffi Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
409. Pseudorhombus cinnamomeus Blkr = Rhombus cinnamomeus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
410. „ oligodon Blkr = Rhombus oligodon Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
411. „ oligolepis Blkr. = Rhombus oligolepis Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
412. Platophrys (Platophrys) myriaster Blkr = Rhombus myriaster Schl. = Rhomboidichthys myriaster Blkr.
413. „ („) grandisquama Blkr = Rhombus grandisquama Schl.
414. Heteroprosopon cornutus Blkr = Platessa cornuta Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
415. Clidodermo asperrimum Blkr = Platessa asperrima Schl.

416. Pleuronectes Yokohamae Günth. — Hab. sin. Yokohama.
417. „ variegatus Günth. = Platessa variegatus Schl.

Soleoidei.

418. Brachirus japonicus Blkr = Aesopia japonica Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
419. „ zebra Swns. = Aesopia zebra Kp. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
420. Achirus japonicus Schl. = Solea japonica Günth.
421. Paraplagusia japonica Blkr = Plagusia japonica Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
422. „ marmorata Blkr = Plagusia marmorata Blkr.
423. Aphoristia orientalis Blkr, Mus Hamburg.

Chacoidei.

424. Plotosus arab Blkr = Plotosius lineatus Schl. = Plotosus anguillaris Lac. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Siluroidei.

425. Leiocassis longirostris = Liocassis longirostris Günth.
426. Pseudobagrus aurantiacus Blkr = Bagrus aurantiacus Schl. — Hab. Kiusiu (Satzuma, Higo, Kuruma); Nippon (Jedo), in fluviis.
427. Arius ocellatus Blkr = Silurus maculatus Thunb. (an = Arius arius Val.?).
428. Parasilurus japonicus Schl. = Silurus japonicus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki, Satzuma, Higo); Nippon (Jedo); in fluviis.

Gonorhynchoidei

429. Gonorhynchus abbreviatus Schl.

Cobitioidei.

430. Botia curta Günth. = Cobitis curta Schl. = Hymenophysa curta Blkr.
431. Cobitis taenia L. = Cobitis taenia japonica Schl. — Hab. Nippon (Jedo) sec. Kurimoto.
432. Misgurnus dichachrous Günth. = Cobitichthys dichachrous Blkr. — Hab. Nippon (Jedo).
433. „ enalios Blkr = Cobithychthys enalios Blkr. — Hab. Nippon (Kaminoseki, Jedo).
434. „ anguillicaudatus Günth. = Cobitis rubripinnis et maculata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
435. „ polynema Günth. = Cobitichthys polynema Blkr. — Hab. Nippon (Jedo).

Cyprinoidei.

436. Carpio vulgaris Rapp. = Cyprinus conirostris, haematopterus, melanotus Schl. = C. flavipinnis K. V. K. (sec. Günth.) — Hab. Kiusiu Nippon (Jedo).
437. Carassius auratus Blkr = Carassius Cuvieri, Bürgeri, grandoculis, Langsdorfii Schl. (sec. Günth.). — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
438. Pseudogobio esocinus Blkr = Gobio esocinus Schl. — Hab. Nippon (Oomi in lacu Biwako) sec. Kurimoto.
439. Acheilognathus intermedius Blkr = Capoëta intermedia Schl. — Hab. Nippon (Bizan) sec. Kurimoto.
440. „ melanogaster Blkr an = Acheilognathus lanceolatus Blkr? — Hab. Nippon (Jedo).
441. „ lanceolatus Blkr = Capoëta lanceolata Schl.
442. „ limbatus Blkr = Capoëta limbata Schl.
443. Paracheilognathus rhombeus Blkr = Capoëta rhombea Schl. — Hab. Nippon (Jedo, Oomi in lacu Biwako) sec. Kurimoto.
444. Hemibarbus barbus Blkr = Gobio barbus Schl. — Hab. Nippon (Osaka), sec. Kurimoto.
445. Gnathopogon elongatus Blkr = Capoëta elongata Schl. = Rasbora (Bengala) elongata Blkr.
446. „ gracilis Blkr = Capoëta gracilis Schl. = Rasbora (Bengala) gracilis Blkr.
447. Sarcocheilichthys variegatus Blkr — Leuciscus variegatus Schl.
448. Pseudorasbora parva Blkr = Leuciscus parvus Schl. — Hab. Nippon, fluviis omnibus sec. Kurimoto.
449. „ pusilla Blkr = Leuciscus pusillus Schl. — Hab. Nippon (Jedo).
450. Leuciscus hakuensis Gill. — Hab. Lacus Hakou.
451. Barilius minor Blkr = Leuciscus minor Schl. = Opsarius minor Blkr; sec. Gthr ead. spec. ac seq. — Hab. Nippon (Jedo) Oomi in lacu Biwako.
452. „ macropus Blkr = Leuciscus macropus Schl. = Opsarius macropus Blkr; sec. Gthr ead. spec. ac seq. — Hab. Nippon (Provinc. Oomi in lacu Biwako) sec. Kurimoto.
453. „ platypus Blkr = Leuciscus platypus Schl. = Opsarius platypus Blkr. — Hab. Nippon (Jedo), sec. Kurimoto.
454. „ ? coreënsis Blkr = Leuciscus coreënsis Val. = Opsarius? coreënsis Blkr. — Hab. Japonia?; Korea?
455. „ Sieboldi Blkr = Leuciscus Sieboldi Schl. = Opsarius Sieboldi Blkr.
456. „ Temmincki Blkr = Leuciscus Temmincki Schl. = Opsarius Temmincki Blkr. — Hab. Nippon (Oomi in lacu Biwako) sec. Kurimoto.

457. Opsariichthys uncirostris Blkr = Leuciscus uncirostris Schl. = Opsarius uncirostris Blkr.
458. Pseudoperilampus typus Blkr. — Hab. Nippon (Jedo).

Cypronodontoidei.

459. Aplocheilus latipes Blkr = Poecilia latipes Schl. — Hab. Nippon (Jedo), fluviis et orizetis.
460. Fundulichthys virescens Blkr = Fundulus virescens Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); in fluviis.

Scombresocioidei.

461. Scombresox saira Brev. — Hab. Sikok (Simoda).
462. Mastaccembelus annulatus Blkr = Belone gigantea Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Lew-Chew.
463. „ schismatorhynchus Blkr = Belone gracilis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
464. Hemiramphus sajori Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
465. „ occipitalis Gill. an = Hemiramphus Gernaerti Val?
466. „ japonicus Brev. — Hab. Lew-Chew.
467. Exocoetus agoo Schl. = Exocoetus oligolepis Blkr? — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Sauridoidei.

468. Synodus Synodus Bl. Schn. = Saurus lucius Schl. — Hab. Kiusiu (Simabara).
469. „ myops Blkr = Saurus trachinus Schl.
470. Saurida tumbil Val. = Aulopus elongatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
471. Aulopus japonicus Günth. Hab. Yokohama.
472. Salangichthys microdon Blkr = Salanx microdon Blkr. — Hab. Nippon (Jedo), in fluviis.

Salmonoidei.

473. Salmo orientalis Pall.? — Hab. Jezo (Hakodadi).
474. „ Perryi Brev., sp. dub. — Hab. Jezo (Hakodadi).
475. „ leucomaenis Pall.? — Hab. Jezo (Hakodadi).
476. „ spec.? Brev. Exp. Jap. Fish. p. 277 tab. 10 fig. 1. — Hab. Jezo (Hakodadi).
477. „ macrostoma Günth. — Hab. Yokohama.
478. Plecoglossus altivelis = Salmo (Plecoglossus) altivelis Schl.
479. Hypomerus olidus Günth. = Osmerus japonicus Brev. — Hab. Lezo (Hakodadi); Japonia orientalis, sec. Kurimoto.

Pseudo-clupeoidei.

480. Conorhynchus glossodon Blkr = Albula bananus Cv.
481. Elops saurus L. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Clupeoidei.

482. Chirocentrus dorab Cuv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
483. Etrumeus micropus Blkr = Clupea micropus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
484. Spratelloides gracilis Blkr = Clupea gracilis Schl. — Hab. Jap. austro-occidentalis.
485. Clupea (Harengula) melanosticta Blkr = Clupea melanosticta Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
486. „ (Harengula) zunasi Blkr = Clupea korval Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo); in mari et fluviis.
487. Ilisha elongata Blkr = Clupea melastoma Schl. = Pellona Schlegelii Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
488. Engraulis ringens Jen.? = Engraulis japonicus Schl., Blkr al. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).
489. Stolephorus japonicus Blkr = Engraulis japonica Günth.
490. „ indicus Blkr = Engraulis Russelli Blkr.
491. Coilia nasus Günth. = Collia nasus Schl.
492. Dorosoma nasus Blkr = Chatoessus nasus Val.
493. „ punctatum Blkr = Chatoessus punctatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo).

Bathythrissoidei.

494. Bathythryssa dorsalis Günth. — Hab. Inosime.

Anguilloidei.

495. Muraena bostoniensis Les. = Anguilla japonica Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Jedo), in fluviis.

Synaphobranchoidei.

496. Synaphobranchus bathybius Günth. — Hab. Nippon (or. mer. Jedo).
497. Synaphobranchus affinis Günth. — Hab. Inosima.

Congroidei.

498. Conger vulgaris Cuv. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
499. „ japonicus Blkr (Mus. Hamburg).
500. Ophisoma anago Blkr = Conger anago Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

501. Muraenesox bagio Pet. = Conger hamo Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda); Nippon (Osaka).
502. Nettastoma parviceps Günth. — Hab. Nippon (or. Jed. mer.).
503. Ophisoma? myriaster Blkr = Anguilla myriaster Brev. — Hab. Hakodadi.
504. „ heterognathus Blkr = Myrophis heterognathus Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
505. „ megastoma Blkr = Congromuraena megastoma Günth. — Hab. Inosima.
506. Myrus uropterus Günth. = Conger uropterus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Ophisuroidei.

507. Leptorhynchus serpens Blkr — Ophisurus serpens Lac. = Ophisurus macrorhynchos Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sokok (Simoda); Nippon (Kaminoseki).
508. Mystriophis rostellatus Kp. = Ophisurus porphyreus Schl.
509. Ophisarus colubrinus Rich. = Muraena annulata Schl.
510. Ophichthys cephalozona Blkr.
511. „ urolophus Günth. = Conger urolophus Schl.
512. „ stenopterus Cope.
513. Gymnothorax albimarginatus Blkr = Muraena albimarginata Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
514. „ Kidako Blkr = Muraena Kidako Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda)?
515. „ pardalis Blkr = Muraena pardalis Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
516. „ similis Blkr = Muraena similis Rich.
517. Priodonophis reticularis Blkr = Muraena minor Schl. = Priodonophis minor Blkr. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Orthagoriscoidei.

518. Orthagoriscus mola Bl. Schn.
519. „ truncatus Flem. = Orthagoriscus oblongus Schn.

Tetraodontoidei.

520. Diodon tigrinus Cuv., Schl.
521. Paradiodon novemmaculatus Blkr = Diodon novemmaculatus Schl. — Hab. Kiusiu (Omura); Sikok (Simoda).

522. Crayracion firmamentum Blkr = Tetraodon firmamentum Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
523. „ lineatus Blkr = Tetraodon lineatus Schl.
524. Tetraodon alboplumbeus Rich.
525. „ sceleratus Forst Gm. L. = Tetraodon argenteus Lac. = Tetraodon bicolor Brev. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
526. „ inermis Schl. — Hab. Kiusiu (Simabara).
527. „ brunneus Brev. — Hab. Sikok (Simoda).
528. „ lunaris Cuv. — Hab. Japonia austro-occident.
529. „ ocellatus Osb. Rich.
530. „ pardalis Schl.
531. „ oblongus Bl. = Tetraodon poecilonotus Schl. = Tetraodon niveatus Brev. — Hab. Sikok (Simoda).
532. „ porphyreus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
533. „ rubripes Schl. = Tetraodon xanthopterus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
534. „ stictonotus Schl. — Hab Kiusiu (Nagasaki).
535. „ vermiculatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
536. Canthegaster grammatocephalus Blkr = Tetraodon grammatocephalus Schl.
537. „ rivulatus Blkr = Tetraodon rivulatus Schl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).

Ostracionoidei.

538. Ostracion (Acanthostracion) arcus Blkr = Ostracion cornutus L. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
539. „ („) concatenatus Blkr = Ostracion concatenatus Bl.
540. „ („) cornutus Blkr = Ostracion cornutus L. = Ostracion diaphanus Bl. Schn. — Hab. Kiusiu (Nagasaki).
541. „ („) gibbosus Blkr = Ostracion turritus Forst. — Hab. Nippon (Kaminoseki).
542. „ (Ostracion) tetragonus L. = Ostracion cubicus Bl. — Hab. Kiusiu (Nagasaki); Sikok (Simoda).
543. Aracana aculeata Günth. = Ostracion aculeatus Houtt. = Ostracion stictonotus Schl. = Hab. Kiusiu (Nagasaki); Nippon (Kaminoseki, Jedo).

Polyodontoidei.

544. Psephurus gladius Günth. = Spatularia angustifolium Kp.

Myxineoidei.

545. Bdellostoma Bürgeri Gir. = Heptatrema cirrhatum Schl. — Hab. Kiusiu (Simabara).

Petromyzontoidei.

546. Petromyzon japonicus V. Mart. — Hab. Nippon (Jetzigo) sec. Kurimoto.

Caprodon Schlegeli Blkr, Verh. Bat. Gen. XXV. Nal. Icht. Jap p 12; Kp Bemerk. über Caprodon. en Ned. T. Dierk. I p. 19.

Syn. *Caprodon* Schl. Faun. Jap. Poiss. p. 64 tab. 30.
Anthias Schlegelii Günth. Cat. Fish. I p. 92.

Je trouve un individu de 295''' de long parmi les poissons du Museum de Hambourg, mais trop mal conservé pour en donner une description détaillée. On ne connait jusqu'ici cette espèce que par la description et la belle figure qu'en a publiées M. Schlegel et par quelques notices de Kaup.

La dentition intermaxillaire et mandibulaire est bien rendue sur la figure de la Faune du Japon et celle de la bouche interne bien indiquée par Kaup.

Sur l'individu du Museum de Hambourg je trouve neuf rangées transversales d'écailles au devant du limbe préoperculaire. La moitié basale de toute la dorsale et de l'anale est couverte d'une dense couche d'écailles. Les écailles du tronc sont fort obliques et j'en compte environ 56 rangées transversales tant au-dessus qu'au-dessous de la ligne latérale. La figure de la Faune du Japon les représente trop nombreuses tant au-dessus qu'au-dessous de la ligne latérale.

Le groupe des dents vomériennes est pyriforme à pointe dirigée en arrière; ceux des dents palatines et pterygoidiennes ont presque la même forme que celui des dents vomériennes mais sont moins larges et plus pointus, les palatins, du double environ plus grands que les pterygoidiens ayant leur pointe dirigée en arrière et les pterygoidiens leur pointe dirigée en avant; le groupe des dents linguales, présentant un ovale oblong, occupe presque toute la langue. Les dents pharyngiennes sont minces et pointues.

L'oesophage est large et se continue dans un estomac cylindrique sans renflement.

Tout l'oesophage et la plus grande moitié antérieure de l'estomac ont la muqueuse densément couverte de longues villosités un peu raides et pluridivisées

à divisions coniques très-pointues et inégales. La plupart de ces villosités ont environ la longueur d'un demi diamètre de l'oeil, mais elles deviennent plus courtes vers le milieu de l'estomac. Dans la moitié postérieure de l'estomac les villosités sont remplacées par de larges plis longitudinaux et élevés qui s'étendent jusqu'au pylore. Je ne trouve pas même de vestige d'appendices pyloriques, organes manifestement superflus par l'immense surface muqueuse représéntée par les plis et les villosités oesophago-stomacales.

Je trouve comme formule des rayons: B. 7. D. 10/20 vel 10/21 P. 1/15. V. 1/5. A. 3/8 ou 3/9. C. 1/15/1 et lat. brev.

Pseudosciaena acanthodes Blkr. Tab. 1.

Pseudosc. corpore oblongo compresso, altitudine 3½ circ. in ejus longitudine absque, 4¼ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis 2 fere in ejus altitudine; capite acutiusculo 3¾ circ. in longitudine corporis absque, 4½ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis 1 et paulo, latitudine capitis 2 fere in ejus longitudine; oculis circularibus diametro 4 et paulo in longitudine capitis, diametro 1 circ. distantibus; linea rostro-frontali rostro convexa fronte rectiuscula; naribus ante pupillae partem superiorem perforatis; rostro oculo breviore, acutiusculo, apice convexiusculo ante pupillam sito, non ante os prominente, utroque latere et antice medio interne incisura brevi, antice medio supra incisuram marginalem poro vel fovea parva parum conspicua; maxilla superiore maxilla inferiore paulo longiore, sub oculi dimidio posteriore desinente, 2¼ circ. in longitudine capitis; maxilla inferiore symphysin versus poris 4 bene conspicuis; dentibus maxillis antice pluriseriatis lateribus pluri- ad biseriatis; dentibus intermaxillaribus serie vel seriebus internis valde parvis serie externa conicis mediocribus distantibus postrorsum longitudine sensim decrescentibus caninoideis nullis; dentibus mandibularibus serie vel seriebus externis valde parvis confertis, serie interna conicis mediocribus distantibus inaequilongis dentibus intermaxillaribus serie externe brevioribus symphysin versus dentibus 2 ad 4 paulo majoribus et magis curvatis; dentibus pharyngealibus conicis acutis, inferioribus serie interna ceteris multo longioribus; rictu valde obliquo; osse praeorbitali sub oculo oculi diametro plus duplo humiliore; praeoperculo limbo bene distincto oculi diametro duplo circ. graciliore, margine posteriore denticulis serrato angulo dentibus 2 vel 3 majoribus validis spinaeformibus inferiore ceteris longiore deorsum spectante; operculo angulo spinulis 2 debilibus vix pungentibus; osse suprascapulari denticulato; lobo suprascapulari membranaceo ciliato nullo, linea laterali mediocriter curvata singulis squamis tubulo vulgo

simplice notata; cauda parte libera aeque longa circ. ac postice alta; squamis rostro genis operculisque cycloideis, capite superne et trunco ctenoideis, praeoperculo ante limbum sat regulariter transversim 6- vel 7-seriatis, opercularibus superioribus opercularibus ceteris conspicue minoribus, nuchalibus et dorsalibus anterioribus lateralibus et caudalibus minoribus, lateralibus mediis quam lateralibus anterioribus et caudalibus minoribus; seriebus squamarum trunco longitudinalibus subhorizontalibus, transversis subverticalibus; squamis angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 63 circ., infra lineam lateralem in series 53 circ. transversas dispositis; squamis serie transversa 24 circ. basin pinnae ventralis inter et pinnam dorsalem, 8 vel 9 lineam lateralem inter et spinas dorsales medias; pinna dorsali partem spinosam inter et radiosam usque ad basin incisa; dorsali spinosa vix longiore quam alta spinis gracilibus rigidis ex parte pungentibus 3° et 4° ceteris longioribus $1\frac{1}{2}$ circ. in altitudine corporis et capitis parte postoculari conspicue longioribus; dorsali radiosa dorsali spinosa $1\frac{1}{2}$ circ. tantum longiore dorsali spinosa humiliore basi tantum squamata, antice quam postice humiliore corpore duplo circ. humiliore; pectoralibus et ventralibus acutis et caudali truncata subaequilongis capite absque rostro non ad vix brevioribus; anali non convexa acutangula dimidio basali squamata dorsali radiosa triplo circiter breviore, spina 2ª validissima capite absque rostro vix breviore radio 1° et spina dorsi longissima non vel vix breviore; colore corpore superne griseo-vel coerulescente-viridi, lateribus et inferne argenteo; iride flava margine orbitali fuscescente; pinnis flavescentibus, imparibus fusco plus minusve.

B. 7. D. 10—1/24 vel 10—1/25. P. 2/14. V. 1/5. A. 2/8 vel 2/9. C. 1/15/1 et lat. brev.

Hab. Japonia.

Longitudo speciminis unici 225‴.

Rem. L'espèce appartient au groupe pour lequel M. Gill a proposé le nom de Bairdiella et doit être voisine du Corvina ronchus Cv. des côtes Atlantiques de l'Amérique, mais celui-ci a les yeux plus petits, le museau notablement plus long, la seconde épine anale plus courte, l'espace interoculaire plus large, etc. Le Bairdiella armata Gill des côtes pacifiques de l'Amérique centrale en paraît plus voisin encore, mais il en est dit que la 4ᵉ épine dorsale mesure environ deux fois dans la longueur de la tête et il présente en outre des formules un peu différentes.

Aphoristia orientalis Blkr, Tab. 2 fig. 1.

Aphor. corpore lanceolato, altitudine $3\frac{3}{4}$ circ. in ejus longitudine; capite linea anteriore obtusiusculo rotundato; $5\frac{1}{3}$ circ. in longitudine corporis, vix altiore quam longo; oculis sinistris contiguis, diametro 8 circ. in longitudine capitis, superiore conspicue ante inferiorem prominente, inferiore supra angulum oris sito; rostro 5 circ. in longitudine capitis, unco brevissimo subnullo parum curvato longe ante oculos desinente; naribus latere oculari posterioribus superioribus regione prae-interoculari perforatis membrana elevata lata claudendis, anterioribus inferioribus tubulatis; naribus latere anophthalmo distantibus foraminiformibus posterioribus anterioribus majoribus membrana elevata claudendis; angulo oris rostri apici quam angulo operculi plus duplo magis approximato; labiis nec fimbriatis nec crenulatis; squamis utroque latere ctenoideis, latere sinistro oculum inter et angulum operculi in series 25 transversas oblique anteversum descendentes dispositis; 90 circ. in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis, 40 circ. in serie transversa initium pinnae analis inter et pinnam dorsalem; squamis mediis lateribus squamis ceteris paulo majoribus; pinnis dorsali et anali corpore quintuplo ad sextuplo humilioribus, dorsali sat longe post apicem rostri supra oculum anteriorem incipiente; ventrali unica, non cum anali unita; caudali obtusiuscula rotundata, capite duplo circ. breviore; colore corpore latere oculari fuscescente viridi; regione operculari medio fascia diffusa transversa fusca; trunc fusco profundiore diffuse nebulato et transversim subfasciato; pinnis fuscis, ventrali tantum flavescente; iride viridi-aurea; colore latere anophthalmo albido, pinnis dimidio libero fuscescente.

B. 6. D. 100 + C. 12 + A. 86 = D. C. A. 198. V. 4.
Hab. Japonia.
Longitudo speciminis unici 188'''.

Rem. L'Aphoristia du Japon doit être voisin de l'ornata des Antilles, mais il a la tête plus longue, le museau relativement plus court et se distingue aussi par la ventrale libre non réunie à l'anale. La formule de l'ornata est donnée un peu différemment (D. 96. C. 10. A. 80. — L. lat. 95), mais cette différence à elle seule peut bien n'avoir pas de valeur spécifique. Je trouve les narines bien développées. Les supérieures de la region préinteroculaire sont assez larges, mais entourées d'une large membrane au milieu de laquelle on arrive, par un examen attentif, à trouver une ouverture assez large. Les narines inférieures.

du côté oculaire sont assez distantes du bord maxillaire et prolongées en tube simple. Les narines du côté aveugle sont de simples trous dont cependant le postérieur est beaucoup plus grand que l'antérieur.

Les deux espèces sont congénériques avec l'espèce type du genre Plagusia de Browne, le nom de Plagusia devrait reprendre droits sur celui ses d'Aphoristie.

Conger japonicus Blkr. Tab. 2 fig. 2.

Cong. corpore elongato antice cylindraceo postice compresso, altitudine 22 circ. in ejus longitudine; capite acuto 8 circ. in longitudine corporis aeque alto circ. ac lato, triplo circ. longiore quam alto; rostro acutiusculo convexo apice parum carnoso, $4\frac{1}{3}$ ad $4\frac{1}{2}$ in longitudine capitis, aeque longo circ. ac basi lato; oculis diametro $6\frac{1}{2}$ circ. in longitudine capitis; naribus posterioribus ante medium oculum perforatis patulis, anterioribus rostri apici approximatis brevitubulatis; osse supramaxillari subhorizontaliter expansili triangulari, sub oculi margine anteriore desinente; labiis mediocribus parum carnosis; rictu sub oculi dimidio posteriore desinente, 3 circ. in longitudine capitis; maxilla superiore maxilla inferiore sat multo longiore; dentibus maxillis parvis confertis conicis obtusiusculis, nasalibus et vomerinis conicis acutis leviter curvatis, maxilla superiore antice tantum biseriatis serie interne rudimentariis medio et postice uniseriatis aequilongis; maxilla inferiore dentibus biseriatis serie interna quam serie externa multo brevioribus, serie externa subaequilongis; dentibus nasalibus triseriatis dentibus ceteris longioribus; dentibus vomerinis antice 4- ad 5- seriatis in thurmam triangularem oculo non longiorem dentibus nasalibus contiguam postrorsum gracilescentem dispositis; apertura branchiali semilunari oculi diametro longiore, in dimidio corporis inferiore sita; trunco pinnam analem inter et aperturam branchialem capite duplo longiore et $2\frac{2}{5}$ circ. in longitudine caudae; cauda media ejus longitudine trunco antice vix humiliore postrorsum sensim gracilescente; linea laterali tubulis simplicibus subcontinuis notata; pinna dorsali antice et medio corpore duplo circiter postice corpore minus duplo humiliore vix ante apicem pectoralis incipiente; pectoralibus capite duplo circ. brevioribus obtuse rotundatis; anali antice in 3ª quinta totius corporis parte incipiente, dorsali humiliore; caudali oculo breviore; colore corpore superne olivascente, inferne dilutiore; iride flava; pinnis flavescentibus.

B. 8. D. 260 circ. C. 12 circ. A. 170 circ. = D. C. A. 442 circ. P. 15.

Hab. Japonia.

Longitudo speciminis unici 336'''.

Rem. Cette espèce est bien caractérisée par sa dentition, par son profil rostro-frontal convexe, par la longueur relative de la tête et de la partie préanale du tronc, par la longueur des pectorales, par la largeur des orifices branchiaux, etc.

Leiobatis (*Trygon*) *nuda* Blkr, Tab. 3

Leiobat. corpore disciformi, disco latiore quam longo (longitudine $1\frac{1}{8}$ circ. in ejus latitudine), antice acuto, linea rostro-pectorali convexiuscula antice tantum concaviuscula; pinna pectorali angulo posteriore obtuse rotundata; capite longitudine $3\frac{1}{4}$ circ. in latitudine disci maxima; rostro acutiusculo $4\frac{3}{4}$ circ. in latitudine disci superne medio sulco longitudinali gracili; oculis diametro 5 circ. in longitudine rostri, diametris 3 circ. distantibus; foramine temporali subtriangulari oculo multo majore; valvula nasali anteriore rictum non attingente, non ciliata; rictu sinuoso latitudine 2 circ. in longitudine rostri praeorali; velo postmaxillari superiore fimbriato; fundo cavitatis oris papillis conspicuis nullis; dentibus maxillis obtusis planis; disco ubique laevi granulis plane nullis; cauda disco multo minus duplo longiore laevi, granulis vel spinulis nullis, membrana libera nulla, parte postspinali anteriore inferne utroque latere carinata, postice in tertia ejus parte anteriore, spina rostro longiore; appendicibus genitalibus ventrales non superantibus, conicis, non valvatis; colore corpore superne profunde olivaceo, inferne albido marginem disci versus aurantiaco; cauda antice superne olivaceo-fusca inferne albida, postice tota fusca.

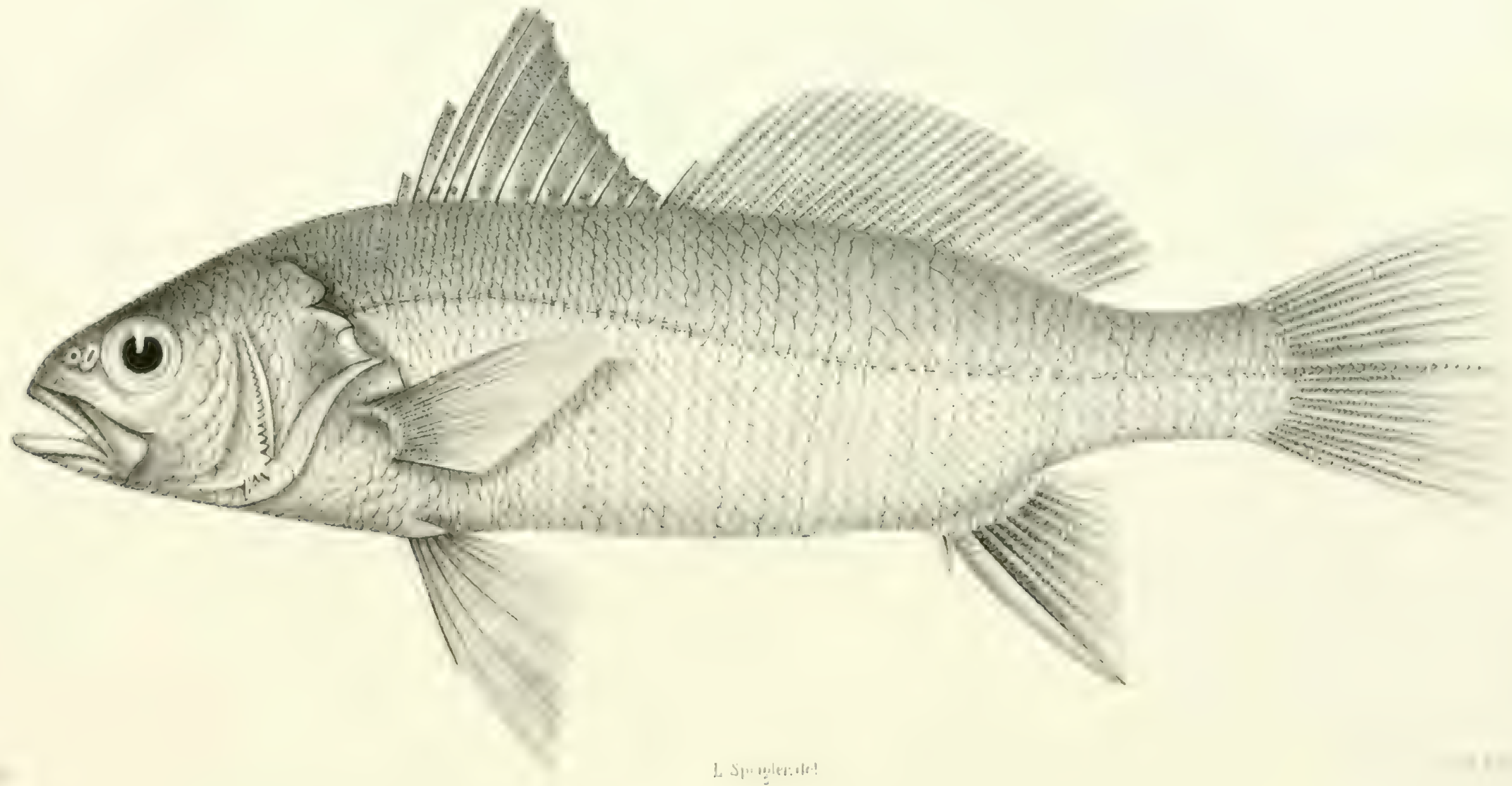
Syn. *Trygon nuda* Günth., Cat. Fish. VIII p. 476 (nec syn).

Hab. Japonia.

Latitudo speciminis masculini descripti 198''.

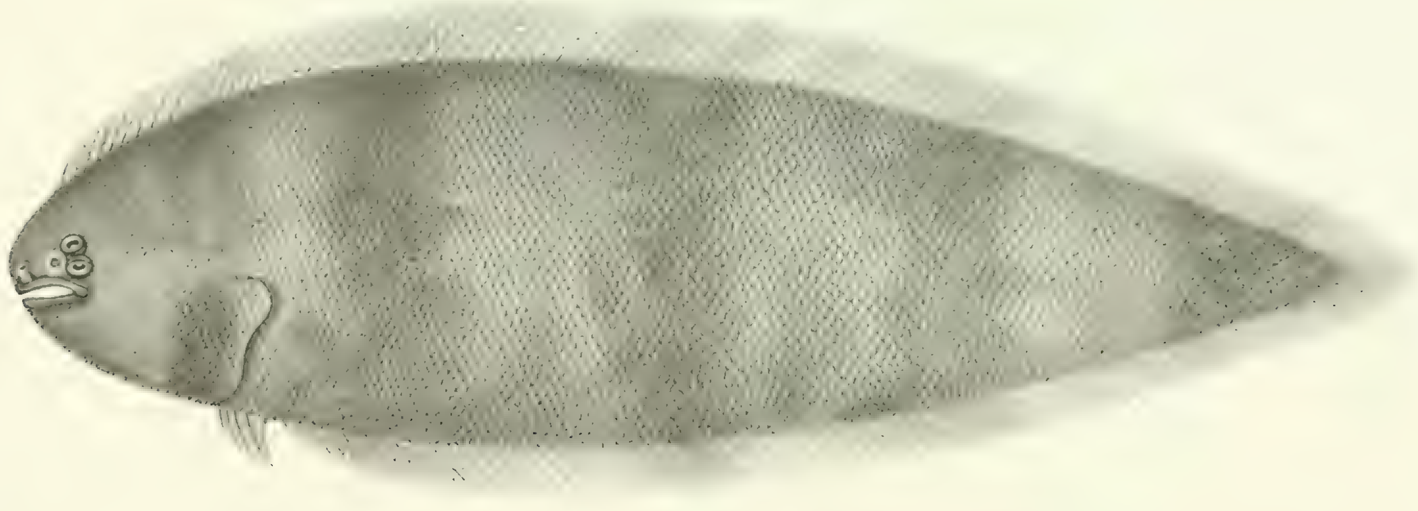
Rem. L'individu décrit repond très bien à la diagnose du Trygon nuda. M. Günther y rapporte le Tenkee thioidraki de Russell (Fish. Corom. fig. 5) et la figure que Müller et Henle ont publiée sous le nom de Trygon walga, mais il me paraît fort douteux que ces figures aient rapport à la même espèce puisqu'elles représentent une forme à disque plus long que large et à bord antérieur fort concave et une queue notablement plus courte. Il paraît qu'il y a plus d'une espèce du genre à disque parfaitement lisse. -- Si les individus cités par M. Günther sont en effet de la même espèce, elle habite aussi les côtes de Singapore et de l'Inde.

Hagae Comitis Calendis, Novembris 1877.



L. Speigler del.

Pseudosciaena [illegible] acanthodes Blkr.

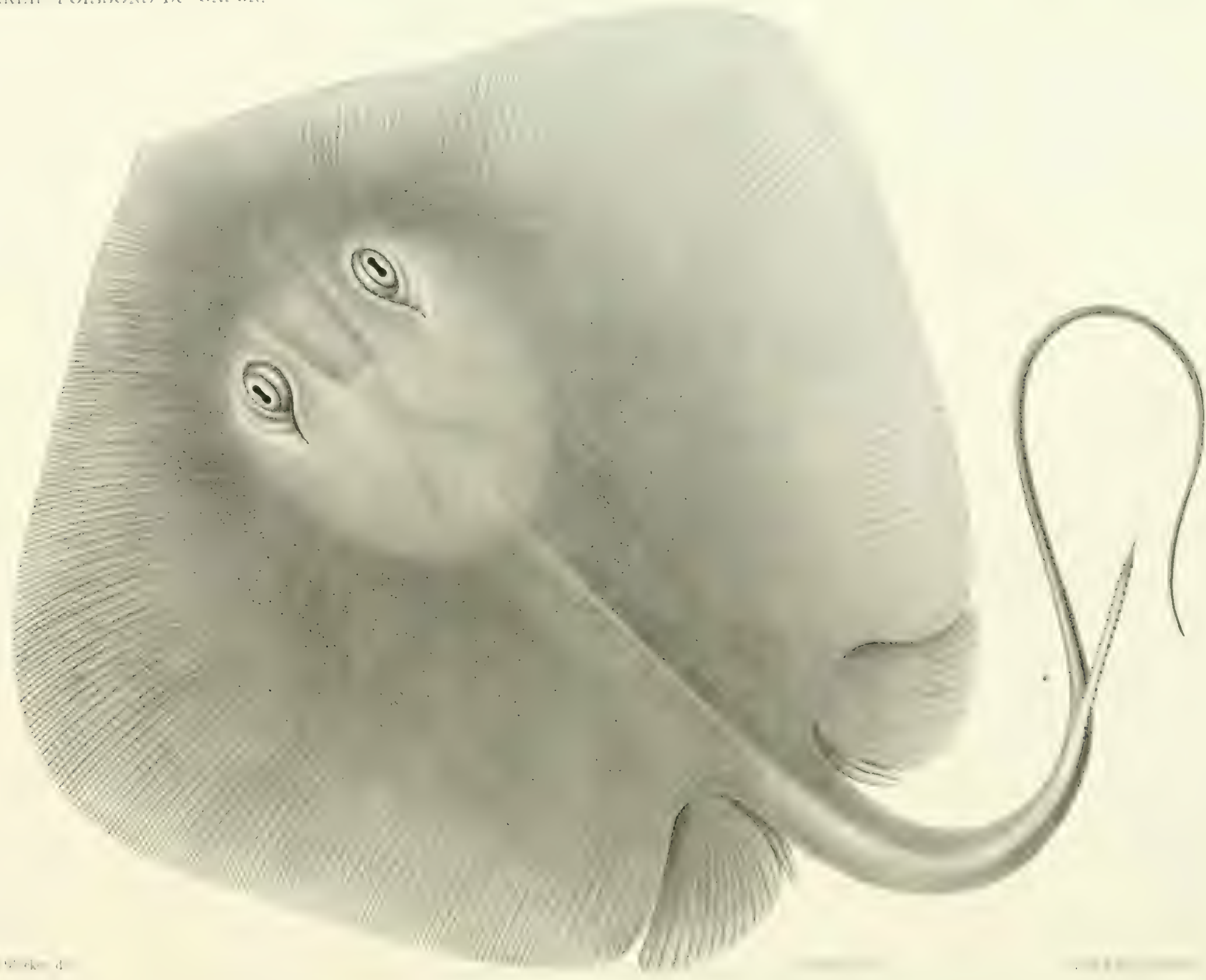






P. Bleeker del.

Fig. 1. Aphoristia orientalis, Blkr. [illegible]



Leiobatis (Trygon) nuda Blkr.